

Л. Д. ПЕВЗНЕР

# ТЕОРИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

*Издание второе,  
исправленное и дополненное*

**РЕКОМЕНДОВАНО**

*УМО вузов РФ по образованию в области радиотехники,  
электроники, биомедицинской техники и автоматизации  
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся  
по направлению подготовки 220400 — «Управление в технических системах»*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
МОСКВА  
КРАСНОДАР  
2013

ББК 22.176я73

П 23

**Певзнер Л. Д.**

**П 23** Теория систем управления: Учебное пособие. — 2-е изд., испр. и доп. — СПб.: Издательство «Лань», 2013. — 424 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-1566-3**

Учебное пособие включает основные разделы современной теории управления динамическими системами, снабжено многочисленными примерами и иллюстрациями, даны упражнения для практических занятий. Книга в значительной мере автономна, в ее приложении содержатся достаточные сведения для понимания математического аппарата современной теории управления.

Для студентов, обучающихся по специальности «Управление и информатика в технических системах» направления подготовки «Автоматизация и управление», «Управление в технических системах» и смежных направлений при изучении дисциплин «Теория автоматического управления», «Основы теории управления», «Автоматизация технологических процессов», а также для аспирантов.

ББК 22.176я73

**Рецензент:**

*Д. Х. ИМАЕВ* — доктор технических наук, профессор кафедры автоматики и процессов управления Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета.

**Обложка**

*Е. А. ВЛАСОВА*

*Охраняется законом РФ об авторском праве.  
Воспроизведение всей книги или любой ее части  
запрещается без письменного разрешения издателя.*

*Любые попытки нарушения закона  
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2013

© Л. Д. Певзнер, 2013

© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2013

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

*Автоматизация производства* — предназначена для частичного или полного исключения человека от непосредственного участия в производственном процессе. Автоматизация производства направлена на то, чтобы процессы получения, преобразования, передачи и использования энергии, материалов и информации выполнялись автоматически.

Необходимость автоматизации обусловлена требованиями прогресса: ростом производительности и эффективности труда, увеличением мощности и быстродействия машин, повышением точности и качества, сложности и опасности технологических процессов, ростом ответственности за безопасность человека и его среды обитания. Автоматические (от греческого *automatou* — самодействующие) системы управления — средства автоматизации.

*Теория управления* — наука, разрабатывающая и изучающая методы и средства создания систем управления.

Особенностью современного этапа научно-технического прогресса является то, что объектами автоматизации оказываются процессы не только материального производства, но и сферы умственной и творческой деятельности человека: организационно-административного управления, распределения ресурсов и принятия решений, проектирования и конструирования, информационного обслуживания, здравоохранения, научных исследований и образования.

Теория управления и ее основная часть *теория автоматического управления* — фундаментальная дисциплина учебного плана многих инженерных специальностей.

Учебное пособие написано на основе многолетнего опыта преподавания дисциплины «Теория автоматического управления», предназначенное в первую очередь для студентов направления «Управление в технических системах» и специальности «Управление и информатика в технических системах», может быть использовано при изучении дисциплины «Теория автоматического управления» и родственными с ней дисциплинами студентами младших курсов смежных специальностей и аспирантами.

Учебное пособие отвечает современной программе и соответствует годовому курсу лекций и практических занятий. Материал пособия структурирован так, что каждая глава делится на разделы, которые помимо теории содержат некоторое число примеров, каждую главу заключают упражнения, которые можно решать аналитически или с использованием программных средств. Более полный набор примеров, упражнений и задач с решениями можно найти в учебном пособии *Певзнер Л. Д. Практикум по теории автоматического управления.* — М.: Высшая школа, 2006.

---

Язык современной теории управления — это язык математического анализа, матричной алгебры, дифференциальных уравнений, теории функций и случайных процессов, поэтому завершает пособие Приложение, которое содержит необходимые понятия и методы этих теорий.

Более полные справочные сведения можно найти в учебном пособии *Певзнер Л. Д. Математические основы теории систем / Л. Д. Певзнер, Е. П. Чураков. — М.: Высшая школа, 2009* или в учебниках соответствующих математических дисциплин.

При написании книги автор постоянно решал проблему как в малом объёме необъятное, как просто изложить сложное, как максимально раскрыть удивительную красоту современной теории управления.

**Часть I**  
**ВВЕДЕНИЕ**



# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

- Ключевые понятия теории автоматического управления
- Примеры автоматических систем управления
- Основные задачи теории управления
- Принципы автоматического управления
- Исторический очерк создания теории автоматического управления

## 1.1. КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Теория автоматического управления* — наука о принципах построения автоматических и автоматизированных систем управления и закономерностях протекающих в них процессов.

Введем ключевые понятия теории управления<sup>1</sup> и затем поясним их:

1. *Управляемый объект*, или *управляемый процесс* (controlled object or process).
2. *Управляющее воздействие* (controlling action).
3. *Возмущение* (disturbance).
4. *Управляемая координата* (controlled coordinate).
5. *Управляющее устройство*, или *регулятор* (controlling object or controller).
6. *Исполнительное устройство* (executive device).
7. *Задающее воздействие* (setting action).
8. *Задающее устройство* (setting device).
9. *Обратная связь* (feedback).
10. *Устройство оптимизации, адаптации* (optimisation or adaptive device).
11. *Система управления* (control system).

Кроме того:

- *Координаты состояния* (coordinates state).
- *Цель управления* (control aim).
- *Качество управления* (control performance).

---

<sup>1</sup> Терминология основных понятий теории управления впервые упорядочена в 1954 г. Академией наук СССР и представлена первому Международному конгрессу IFAC в 1960 г. Терминология современной теории управления регламентирована специальным «Сборником рекомендуемых терминов» (М.: Наука, 1988. — Вып. 107).

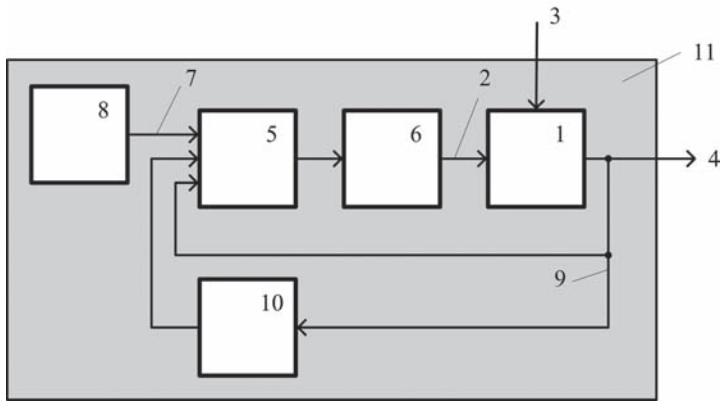


Рис. 1.1

Структура автоматической системы управления

- Закон, или алгоритм управления (control law or control algorithm).
- Структура системы управления (control system structure).

*Управляемый объект*, или *управляемый процесс* есть динамическая система произвольной природы, изменяющая свои *координаты состояния* и, как следствие, выходные *управляемые координаты*, под влиянием внешних воздействий — *управляющих* и *возмущающих*.

Для достижения объектом *цели управления* организуют специальное управляющее воздействие, которое формируется *управляющим устройством* и усиливается исполнительным устройством на основе командного сигнала — задающего воздействия от по известному *алгоритму* или *закону управления*.

Для достижения заданных показателей качества процесса управления используют устройство адаптации или оптимизации.

Совокупность указанных элементов, связей и отношений между элементами *системы управления* образует *структуру системы управления*, которая приведена на рис. 1.1.

Теория управления, используя *математические модели*, позволяет изучать *динамические процессы* в автоматических системах, формировать структуру и определять параметры составных частей системы, для придания реальному процессу управления желаемых свойств и заданного качества.

Теория управления является фундаментом для специальных дисциплин, решающих проблемы *автоматизации управления* и *контроля* технологических процессов и технологических объектов, проектирования *следящих систем* и *регуляторов*, автоматического *мониторинга* производства и окружающей среды, создания *автоматов* и *робототехнических систем*.

Более широкий список понятий и терминов теории автоматического управления с более глубоким раскрытием этих понятий и терминов можно найти в «Электрон-



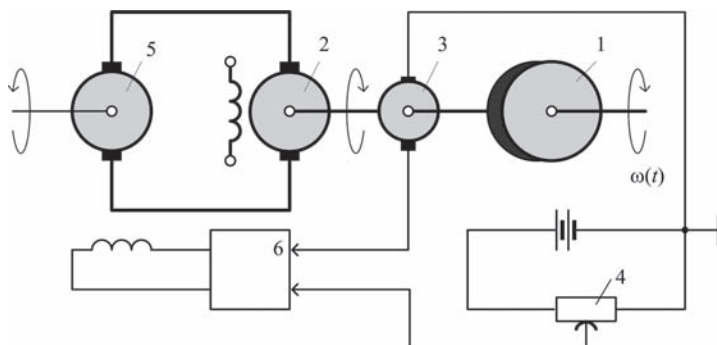


Рис. 1.2

*Система регулирования частоты вращения электродвигателя постоянного тока*

ном глоссарии терминов по проблемам управления»<sup>2</sup>. Глоссарий создан в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН.

## 1.2. ПРИМЕРЫ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Все многообразие систем регулирования и управления невозможно себе представить, поэтому приведем лишь несколько примеров автоматических систем, важные с точки зрения будущей классификации этого многообразия и ставшие уже классическими. В последующих главах число примеров будут множиться.

### Система регулирования частоты вращения электродвигателя постоянного тока (рис. 1.2)

Цель регулирования — стабилизация частоты вращения рабочей машины 1 независимо от нагрузки. При изменении нагрузки на рабочей машине частота вращения двигателя 2 изменяется. Значение сигнала, пропорционального отклонению истинной частоты вращения  $\omega(t)$  от заданной  $\omega^*$ , измеряют с помощью тахогенератора 3 и потенциометра 4.

Сигнал разности  $\omega(t) - \omega^* = \varepsilon(t)$ , усиленный по амплитуде и мощности, подают в обмотку возбуждения генератора 5, который питает по якорной цепи двигатель независимого возбуждения так, чтобы отклонение частоты вращения уменьшалось. Потенциометр, усилитель 6 и генератор в данном случае выполняют функцию регулятора. Заданное значение  $\omega^*$  устанавливают с помощью независимого источника питания и может быть изменено потенциометром.

### Система автоматической стабилизации курса (рис. 1.3, а)

Гироскоп 1 раскручивают так, чтобы его ось вращения была направлена по заданному курсу, потенциометры задания 2 и истинного направления 3 включены в мостовую схему. Сигнал, пропорциональный отклонению от заданного курса  $\varepsilon(t)$ ,

<sup>2</sup> <http://www.glossary-ipu.ru>

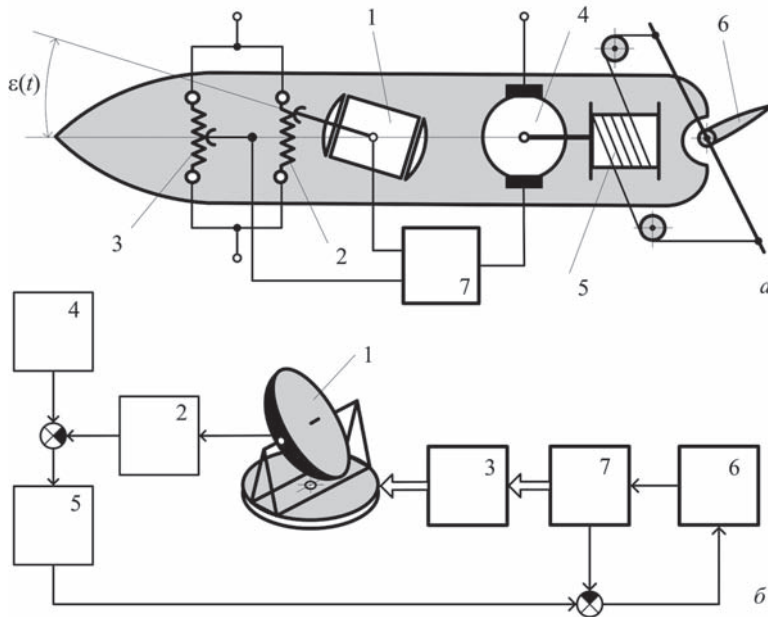


Рис. 1.3

Система: а — автоматической стабилизации курса; б — углового сопровождения радиотелескопа.

снимают с диагонали моста, усиливают по мощности в усилителе 7 и подают на двигатель 4 рулевой машины 5. Уход с заданного курса устраняют поворотом руля 6 рулевой машиной.

### Система углового сопровождения радиотелескопа (рис. 1.3, б).

Параболическое зеркало 1 антенны фокусирует электромагнитное излучение внешнего пространства в центральной точке телескопа, откуда сигнал излучения передается по волноводу к приемнику. Платформа телескопа, закрепленная в кордановом подвесе, обеспечивает движение параболоида антенны в координатах *угол места-азимут*. Угол азимута измеряют цифровым оптическим датчиком 2 непосредственно на оси платформы относительно специального источника света. Для поворота платформы используют маломощный высокомоментный гидропривод 3.

Задание слежения составляет азимутальный угол наблюдения, астрономические координаты которого пересчитываются в земные координаты специальным вычислительным устройством 4. Цифровой сигнал углового рассогласования преобразует в аналоговый сигнал устройство 5. Непрерывный сигнал рассогласования вместе с сигналом коррекции, которым учитывается скорость и ускорение разворота платформы, подают через усилитель 6 на электромеханический преобразователь 7 гидропривода.

Основными возмущениями в системе являются упругие деформации опор, которые вызываются порывами ветра, температурными изменениями и неуравновешенностью конструкции при смене угла места.

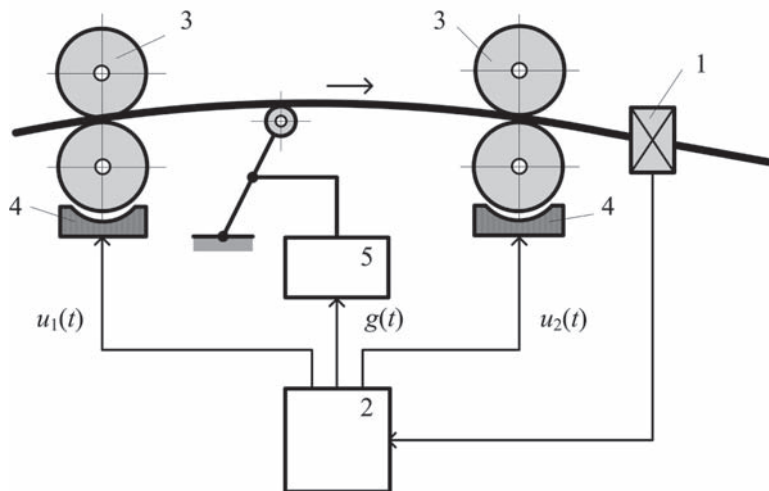


Рис. 1.4

*Система регулирования толщины ленты стального проката*

### Система регулирования толщины ленты стального проката (рис. 1.4)

Измерение толщины стальной полосы выполняют в системе рентгеновским толщиномером 1, непрерывный сигнал пропорциональный толщине преобразуется аналого-цифровым преобразователем и подается в микроконтроллер 2.

Контроллер выполняет функции регулятора, в нем происходит сравнение текущей толщины с технологическим заданием, определяются на текущий дискретный момент  $t$  законы  $u_1(t), u_2(t)$  обжима двумя ближайшими клетями 3 полосы стального проката и необходимое при этом натяжение  $g(t)$  ленты. Вычисленные цифровые сигналы преобразуют в непрерывные цифроаналоговым преобразователем и затем подают на исполнительные механизмы сжатия 4 и натяжения 5.

### Система автоматического слежения за целью (рис. 1.5)

Система предназначена определять расстояние от радиолокационной станции до подвижной цели, например, самолета. Искомое расстояние  $\rho(t)$  пропорционально времени прохождения импульсов от передатчика к цели и обратно к приемнику, поэтому истинное расстояние пропорционально временному положению  $T$  принимаемой пачки импульсов по отношению к моменту их посылки.

Оценка расстояния  $\rho(t)^*$ , определяемого системой, характеризуется временным положением  $T^*$  селекторных импульсов дальности, которые формирует модулятор 1. Если добиться того, что временное положение селекторных импульсов  $T^*$  совпадет с временным положением  $T$  принимаемых сигналов, задача автоматического слежения по дистанции будет решена.

Для сравнения этих временных положений, отраженные и селекторные сигналы подают в дискриминатор 2, который формирует сигнал ошибки в виде коротких серий импульсов. Фильтр 3 усредняет пачки импульсов сигнала ошибки, превращая их в

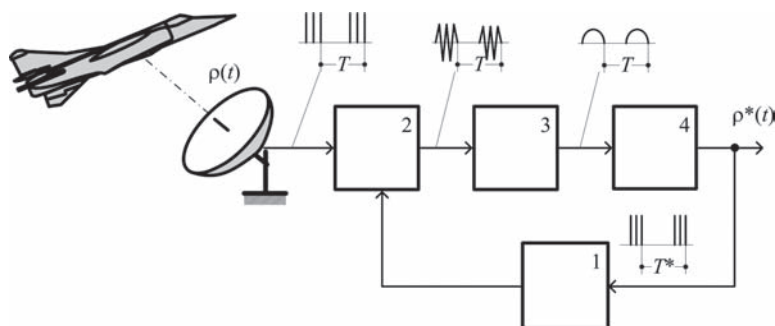


Рис. 1.5

Система автоматического слежения за целью

один импульс, пропорциональный разности

$$\varepsilon(t) = \rho(t) - \rho^*(t)$$

истинного расстояния и оценки этого расстояния, а затем устройство 4 формирует сигнал оценки расстояния, из которого модулятор генерирует селекторные импульсы.

### Система управления процессом нанесения полимерного покрытия на рулонную основу (рис. 1.6)

Целью управления является стабилизация средней толщины покрытия на заданном значении при минимальной среднеквадратичной неравномерности покрытия. Полимерный раствор из емкости 1 попадает на основу, которая подается опорным барабаном 2 с некоторой скоростью.

Текущая толщина покрытия  $y(t)$  зависит от значения зазора  $x_1(t)$  между емкостью и основой, уровня раствора полимера в емкости  $x_2(t)$ , динамической вязкости раствора  $x_3(t)$  и скорости  $x_4(t)$  движения основы. Для достижения цели в системе необходимо поддерживать постоянными величины  $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ . Основным возмущением является случайная неравномерность толщины основы. Стабилизацию переменных  $x_2(t), x_3(t), x_4(t)$  осуществляют независимые локальные системы регулирования. Например, вязкость полимера стабилизируют регулированием температуры раствора. Контур управления содержит датчик температуры 3, регулятор 4 и клапан, управляющий подачей горячей воды в термостатическую оболочку емкости 5. Уровень раствора измеряют датчиком 6 и регулируют контроллером 7 путем перекрытия клапанов подачи раствора.

Напомним, что целью управления является стабилизация среднего значения толщины покрытия и ее среднеквадратичного отклонения. Фактически значение средней толщины и среднего квадрата отклонения подсчитывают дискретно через определенные промежутки времени по данным измерений текущих значений толщины покрытия и основы, которые осуществляются датчиками 8. Если управляемые величины не отвечают требованиям, то контроллер, используя математическую модель гидродинамического истечения жидкости выполняет адаптивный процесс поиска новой рабочей точки — новых значений вязкости, уровня и скорости движения основы. Найденные

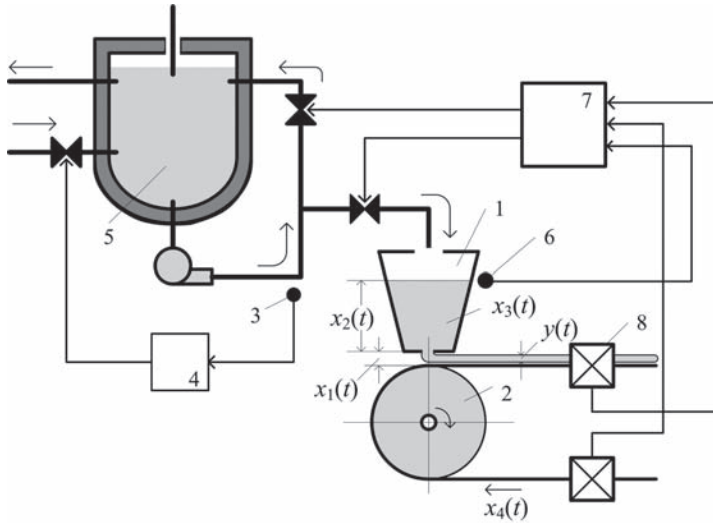


Рис. 1.6

*Система управления процессом нанесения полимерного покрытия на рулонную основу*

оптимальные значения этих переменных будут заданием на последующий интервал времени.

### **Система управления манипуляционным роботом (рис. 1.7)**

Система предназначена для динамического управления отдельными сочленениями робота для перемещения манипулятора по планируемой траектории. Динамические переменные движения: угловые перемещения, скорости и ускорения, силы и моменты, отвечающие планируемой траектории, вычисляются заранее до начала движения и хранятся в памяти компьютера робота. Эти переменные как функции времени определяют геометрию, кинематику и динамику планируемой траектории, которая является текущим заданием для системы управления. Задача системы управления состоит в том, чтобы отследить эту траекторию, сделав отклонения от нее минимальными.

Следящая система управления схватом робота-манипулятора, представленная на рис. 1.7, содержит: компьютер 1, цифроаналоговый преобразователь 2, усилитель 3, датчики положения 4, скорости 5 и тактильные датчики внешней информации 6, интерфейс датчиков 7.

### **Система автоматического контроля параметров микроклимата в теплице**

Технология выращивания растения требует не просто поддержания температуры в какой-то точке теплицы, а ставит задачу распределения температуры с достаточно большой точностью в непосредственной окрестности и даже по всей высоте растения, от прикорневой зоны до его макушки. Такой режим стимулирует растения к высокой урожайности и защищает их от болезней, связанных с нарушением микроклимата.

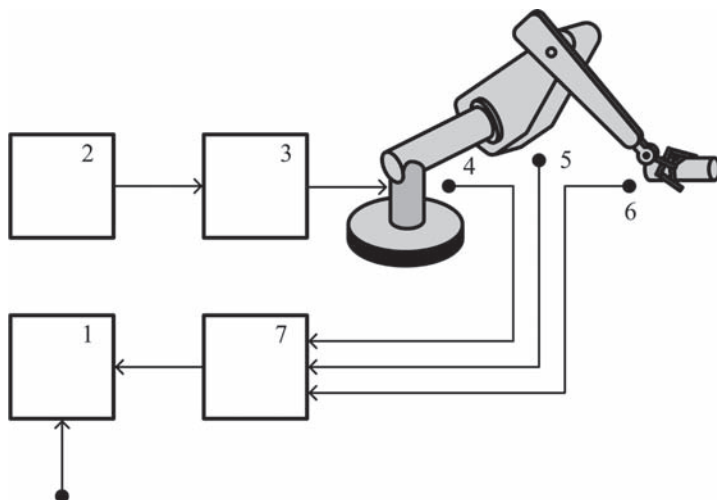


Рис. 1.7

*Система управления манипуляционным роботом*

Система автоматического управления микроклиматом позволяет одновременно в нескольких климатических зонах теплицы управлять двумя десятками параметров климата: температурой и влажностью воздуха внутренней среды и локальных зон, концентрацией углекислого газа, температурой точки росы, температурой воды в системе теплоснабжения, положением фрагм и штор, температурой стекла для предотвращения замерзания и накопления снега и других параметров.

Система контролирует оптимальный расход энергии для реализации микроклимата, которого требует технологический процесс.

Сигналы многочисленных датчиков в цифровой и аналоговой форме поступают по сетевой системе передачи данных в контроллер, исполнительными устройствами системы являются вентиляторы, газогенераторы, калориферы, приводы фрагм и штор, кондиционеры и пр.

Теплица, разбитая на несколько климатических зон, содержит как собственные исполнительные подсистемы управления параметрами микроклимата, подсистемы искусственного освещения и обогрева, так и системы, позволяющие создать динамически согласованное общее управление.

### 1.3. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотренные примеры лишь немного проиллюстрировали разнообразие и множества систем управления, тем не менее они все же позволяют провести некоторое обобщение. Все системы решают как минимум одну из трех задач:

- поддержание некоторых управляемых переменных системы на заданном уровне;
- программное изменение управляемых переменных системы;

- слежение за произвольно изменяемым во времени входным задающим воздействием.

Системы, решающие задачи первого вида, называют *системами стабилизации*, второго — *системами программного управления*, третьего — *слеящими системами*.

Задающее воздействие в системах стабилизации в течении всего процесса управления неизменно, в системах программного управления задающее воздействие — это известная функция времени, в слеящих системах — произвольная функция времени.

Примерами систем стабилизации являются системы: регулирования частоты вращения электродвигателя; автоматической стабилизации курса; регулирования толщины ленты стального проката; управления процессом нанесения полимерного покрытия на рулонную основу.

Примером системы программного управления служит система управления движением манипуляционного робота, если рассматривать робота как систему, предназначенную для выполнения программно-известных движений. Другими примерами систем программного управления являются: система автоматического поддержания в теплице таких климатических параметров, как функция времени суток и технология выращивания растений, и система разогрева стального слитка в методической печи, где температура разогрева должна изменяться по заранее известной программе.

Примерами слеящих систем являются системы: углового сопровождения радиотелескопа; автоматического слежения за целью; управления движением схвата манипуляционного робота.

Основные задачи теории управления — это *задачи анализа и синтеза*.

Определение динамических свойств автоматических систем на модельном или физическом уровне составляют *задачи анализа*.

Определение алгоритма управления, выбор реализующей этот алгоритм функциональной структуры автоматической системы, ее параметров и характеристик, удовлетворяющих требованиям качества и точности, составляют *задачи синтеза*.

Задачи автоматизированного проектирования систем управления, создания и испытания реальных автоматических систем также входят в число основных задач теории.

#### 1.4. ПРИНЦИПЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Основное предназначение системы автоматического управления — это устранение до необходимых пределов отклонения управляемой переменной от входного задающего воздействия, независимо от внешних возмущений.

Способ управления определяется принципом образования управляющего воздействия. По способам управления автоматические системы разделяют на *разомкнутые* и *замкнутые*.

В разомкнутых автоматических системах управляющее воздействие  $u(t)$  формируют управляющим устройством как функции задающего  $g(t)$ , или возмущающего воздействия  $p(t)$ . Например, если известна модель объекта  $y = Y(u, p)$ , в алгебраической или дифференциальной форме и известно необходимое движение  $y(t)$ , то в

некоторых случаях возможно решить обратную задачу

$$u(t) = G(y(t), p(t))$$

и тем самым определить то управление, которое необходимо для реализации движения объекта 1 (рис. 1.8, а).

Найденный закон управления  $u(t)$  реализуют регулятором 2. Некоторые системы программного управления построены по этому способу.

Отметим, однако, что управление  $u(t) = G(y(t), p(t))$  можно реализовать в том случае, если возмущение  $p(t) = \text{const}$  или  $p(t)$  можно измерить. На рис. 1.8, б представлена структура, реализующая такой принцип управления, который носит название **принципа управления по возмущению**.

Структура системы, реализующей принцип управления по возмущению, является разомкнутой. Основные недостатки систем с разомкнутой структурой:

- а) нельзя аналитически учесть все действующие возмущения и поэтому невозможно иметь идеально точную модель системы  $y = Y(u, p)$ ;
- б) отсутствует возможность измерить все регулярные и нерегулярные возмущения;
- в) разомкнутые системы не могут управлять неустойчивыми объектами и объектами с изменяющимися параметрами.

Структура замкнутых систем, называемых **системами с обратной связью**, управления представлена на рис. 1.8, в. Управляющее воздействие  $u(t) = u(\varepsilon(t))$  формируется как функция рассогласования

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$$

текущего значения управляемой переменной от требуемого задающего воздействия, что позволяет использовать рассогласование, которое является следствием управления в причину для устранения этого рассогласования. Эта фундаментальная идея, *идея обратной связи*, лежит в основе **принципа управления по отклонению**, который реализуется замкнутыми системами.

Принцип управления по отклонению универсален потому, что позволяет достигать цели управления независимо от причин, вызвавших рассогласование, будь то внешние воздействия или изменения внутренних свойств объекта. Неустойчивые объекты могут быть управляемы только системами с замкнутыми структурами. Замкнутые системы позволяют решать все задачи управления: стабилизации, слежения и программного управления.

Обобщением двух рассмотренных принципов управления является **принцип комбинированного управления** (рис. 1.8, г), который позволяет в замкнутой системе получить преимущества принципа управления по возмущению.

Системы, способные изменять закон управления с целью осуществления наилучшего в некотором смысле качества управления независимо от внешних воздействий (рис. 1.8, д), используют **принцип адаптации**. Показатель качества, имеющий экстремальную форму, используется устройством адаптации 3, для изменения структуры управляющего устройства или его параметров.



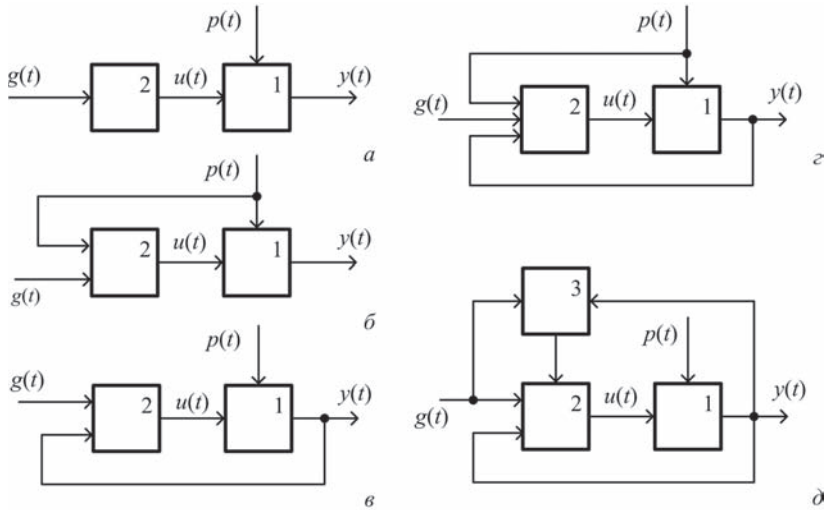


Рис. 1.8

Принципы автоматического управления: а — программный; б — по возмущению; в — по отклонению; г — комбинированный; д — с адаптацией.

Все многообразие автоматических систем можно разделить на классы по различным признакам, из которых важнейшими являются:

*цель управления, вид структуры, вид и размерность математической модели, характер сигналов, параметров и внешних воздействий.*

Согласно этим классификационным признакам будем различать:

- системы стабилизации, системы программного управления, следящие системы;
- системы разомкнутые, замкнутые или комбинированной структуры;
- модели линейные, нелинейные, скалярные и векторные;
- системы непрерывные, дискретные, гармонически модулированные;
- системы стационарные и нестационарные;
- системы с сосредоточенными или распределенными параметрами;
- системы, испытывающие детерминированные или стохастические воздействия.

## 1.5. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК СОЗДАНИЯ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Теория управления обобщает многовековой опыт создания автоматов, регуляторов и систем автоматического управления в самых разнообразных сферах человеческой жизни и деятельности.

В древнем Вавилоне в своде законов царя Хаммурапи описан закон управления водоподачей для регулирования влажности почвы путем перекрытия каналов. Герон Александрийский на рубеже новой эры описывал свои автоматы и автоматы древних для открывания дверей храма при зажигании жертвенного огня, продажи священной воды, движения кукол-марионеток.

В средние века создавались автоматы, подражающие движениям человека — железный человек Больштадта, пражский глиняный колосс Голем. Восемнадцатый век породил большое число антропоморфных автоматов: писец, художник и музыкант швейцарских часовщиков Пьера и Анри Дро; кукольный театр Ивана Кулибина.

Первыми промышленными автоматическими устройствами являлись: так называемый *зюд-вестовый привод Андре Майкла* (1750) для автоматического разворота по ветру башни ветряной мельницы; регулятор питания котла паровой машины Ивана Ползунова (1765); центробежный регулятор скорости паровой машины Джеймса Уатта (1784) и система программного управления ткацким станком Жозеф-Мари Жакара (1804).

В восемнадцатом и девятнадцатом веках были реализованы основные принципы управления: Иван Ползунов и Джеймс Уатт использовали генеральный принцип управления с обратной связью — управление по отклонению; Жан Понселе (1850) применил принцип управления по возмущению — управление по нагрузке, что породило и привело к теории инвариантности систем управления; братья Вернер и Вильгельм Сименсы (1845) применили регулятор с дополнительным воздействием по производной от регулируемой величины.

Жозеф Фарко впервые осуществил (1873) не прямое регулирование, используя для усиления мощности управляющего сигнала сервопривод; офицер российского флота А. П. Давыдов создал (1880) первую следящую систему с электрическим приводом для корабельной пушечной установки; К. Э. Циолковский предложил (1898) автоматический регулятор горизонтального руля для стабилизации полета дирижабля.

Первые работы по теории управления опубликовали Джеймс Максвелл «*О регуляторах*» (1868) и Иван Алексеевич Вышнеградский «*О регуляторах прямого действия*» (1876). В этих работах регулятор и объект управления впервые рассмотрены в единстве как система регулирования, что позволило поставить проблему анализа динамических свойств системы регулирования в целом. И. А. Вышнеградский, анализируя систему *силовая машина-регулятор*, получает для этой системы уравнения малых отклонений, характеристическое уравнение третьего порядка и находит инженерные условия устойчивого регулирования.

Задача синтеза регулятора прямого действия, обеспечивающего наибольшую точность, впервые поставлена Пафнутием Львовичем Чебышевым в работе «*О центробежном уравнителе*» (1871).

В эти же годы теория управления обогатилась постановкой и решением проблемы устойчивости системы регулирования. Английский физик Дж. Максвелл на основании своего опыта управления движением телескопа, решил частную задачу устойчивости для системы третьего порядка *паровая машина-регулятор*, а затем поставил на заседании Лондонского математического общества в 1868 году общую задачу определения устойчивости линейной системы регулирования произвольного порядка по виду ее характеристического уравнения. Эдуард Раус нашел (1874) решение этой задачи и представил ее в форме критерия устойчивости.

Профессор Высшей технической школы (г. Цюрих, Швейцария) Аурель Стодола, который известен как создатель совершенных по тому времени паровых и газовых турбин, независимо от Дж. Максвелла, используя идею линеаризации уравнений движения, пришел к выводу (1892), что задача устойчивости системы автоматического

управления сводится к проблеме исследования расположения корней характеристического уравнения этой системы. Задачу Стодола решил в алгебраической форме, создав критерий устойчивости, его коллега по университету профессор Адольф Гурвиц (1895).

Общая проблема устойчивости движений нелинейной динамической системы поставлена и разрешена (1892) Александром Михайловичем Ляпуновым. Результаты А. М. Ляпунова явились основой для создания различных методов анализа и синтеза систем управления движением.

В начале двадцатого века появились многочисленные работы по теории регуляторов и регулирования, обобщавшие опыт создания и эксплуатации сервомеханизмов для автоматического управления паровыми и электрическими машинами, кораблями и летательными аппаратами.

Классическими стали работы: М. Толле *«Регулирование силовых машин»* (1905); Н. Е. Жуковский *«Теория регулирования хода машин»* (1909); М. Жюльяр *«Автоматические регуляторы электрических машин»* (1912); Н. Минорский *«Устойчивость на курсе автоматически управляемых тел»* (1922); И. Н. Вознесенский *«Быстродействующие сервомоторы»* (1922); Г. Хазен *«Теория сервомеханизмов»* (1934).

В тридцатых годах проблемы развития электротехники и радиотехники привели к созданию специального инженерного языка — частотных характеристик, который был использован для анализа и синтеза систем регулирования: Г. Найквист предложил (1932) критерий устойчивости замкнутых автоматических систем по частотным характеристикам ее разомкнутой части.

В 1938 году А. В. Михайлов сформулировал частотный критерий устойчивости систем без размыкания, Х. Боде ввел (1943) логарифмические частотные характеристики для анализа цепей и усилителей с обратными связями. В. В. Солодовников разработал (1939) инженерные методы частотного проектирования линейных систем автоматического регулирования.

Прямые, не частотные методы анализа и синтеза линейных систем создавались трудами Ю. И. Неймарка, В. С. Кулебакина, С. П. Стрелкова, Я. З. Цыпкина, Б. Н. Петрова, А. А. Красовского, А. А. Фельдбаума. Завершает построение общего здания теории линейных систем управления работы А. М. Лётова, Р. Калмана и Л. Заде, выполненные в шестидесятые годы прошлого столетия.

Теория стохастических систем управления берет свое начало с классических работ А. Н. Колмогорова (1941), А. Я. Хинчина (1938), Н. Винера (1931), а затем получила дальнейшее развитие в трудах В. В. Солодовникова (1950), В. С. Пугачева (1950), П. И. Кузнецова (1954), Р. Калмана (1960), К. Острёма (1962).

Нелинейная теория управления развивалась на основе методов механики, теории колебаний и теории дифференциальных уравнений. А. М. Ляпунов (1892) предложил методы анализа устойчивости движения нелинейных систем в малом и большом. Методы фазового пространства, малого параметра и метод гармонического баланса создавали А. Пуанкаре (1905), А. А. Андронов (1928), Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов (1932), Б. В. Булгаков (1942), Л. С. Гольдфарб (1947), Дж. Массера (1948), А. И. Лурье (1951).

Частотные методы анализа устойчивости нелинейных систем созданы В. М. Поповым (1959).

В 1948 году Я. З. Цыпкин и Э. Джури, используя дискретную форму преобразования Лапласа, закладывают основы, а затем развивают общую теорию дискретных автоматических систем.

Создание теории инвариантных систем управления, обладающих свойствами независимости динамических характеристик от внешних возмущений, берет свое начало от работ Г. В. Шипанова (1938), Н. Н. Лузина (1940). Принципы физической реализуемости инвариантных систем разработаны В. С. Кулебакиным (1948) и Б. Н. Петровым (1956).

Общая теория оптимальных систем управления была разработана в шестидесятые годы прошлого столетия трудами Л. С. Понтрягина, Б. В. Болтянского, Н. Н. Красовского, А. А. Фельдбаума, Р. Беллмана, Р. Калмана.

Теория экстремальных и адаптивных систем управления основывается на работах В. В. Казакевича, А. А. Красовского, Я. З. Цыпкина.

Современный этап развития теории управления характеризуется высоким уровнем использования методов алгебры, функционального анализа, теории случайных процессов и вычислительных средств для решения сложных задач анализа и синтеза систем управления в условиях неполной определенности, создания оптимальных систем управления, работающих в стохастической среде.

В 1939 году в составе Отделения технических наук Академии наук СССР был создан Институт автоматики и телемеханики. Его основной целью было проведение фундаментальных и прикладных научных работ в области автоматики и управления, главными направлениями исследований стали теория автоматического регулирования и создание элементов автоматических устройств. Первым директором Института, был академик В. С. Кулебакин. В 1969 году Институт автоматики и телемеханики был переименован в Институт проблем управления, его директором стал В. А. Трапезников.

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской Академии Наук — основной научный центр, занимающийся теоретическими и прикладными исследованиями в области управления.

В 1957 году создана Международная федерация по автоматическому управлению *International Federation of Automatic Control — IFAC*. Первый конгресс этой федерации был проведен в 1960 году в Москве, ее президентом был избран А. М. Лётов.

Ежегодно проводятся десятки отечественных и международных конференций и симпозиумов различных уровней, которые обобщают и координируют работы в области теории и практики автоматического управления.

Теория автоматического управления является фундаментальной дисциплиной инженерного образования, ее преподают во всех технических вузах России.

**Часть II**

**АНАЛИЗ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ**



## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

- Примеры непрерывных систем управления
- Модели состояния линейной системы
- Линеаризация нелинейных моделей
- Модели типа «вход-выход»
- Графовые модели систем
- Взаимосвязь моделей системы
- Упражнения

### 2.1. ПРИМЕРЫ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Непрерывные системы отличаются тем, что сигналы в любой точке структуры системы являются непрерывными функциями времени.

Простейшим примером непрерывной системы управления может служить система регулирования уровня жидкости, схема которой приведена на рис. 2.1. В емкости с жидкостью поплавков 1 непрерывно отслеживает уровень, перемещая контакт потенциометра 2. Предполагаем, что характеристики контактной поверхности потенциометра линейные и непрерывные, тогда напряжение питания двигателя 3, пропорциональное отклонению уровня от заданного, также оказывается непрерывным.

Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением непрерывно поворачивает вентиль 4 питающей трубы на угол, пропорциональный сигналу ошибки, и поток жидкости пополняет емкость. Для выбранной степени детализации оказывается, что все сигналы схемы непрерывны, модели всех элементов этой системы — линейные.

Приведенный пример иллюстрирует субъективный подход к выбору модели описания системы. В самом деле, при другом взгляде на систему оказывается, что характеристика потенциометра нелинейна и разрывна, исполнительный механизм содержит не только двигатель, но и редуктор, характеристика которого также нелинейна, поскольку зубчатая передача имеет люфты. Все это верно, но верно и другое. Неоднозначность выбора модели системы — это инструмент последовательного познания реальности. На данном этапе мы изучаем линейные модели, в которых все переменные непрерывны, как самые простые модели автоматических систем. Другими примерами непрерывных линейных систем управления являются система регулирования частоты вращения двигателя и система автоматической стабилизации курса (см. гл.1).

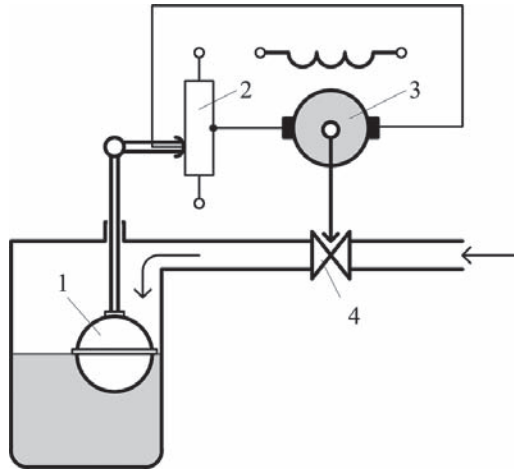


Рис. 2.1

Система регулирования уровня жидкости

## 2.2. МОДЕЛИ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Будем рассматривать класс систем (рис. 2.2), движение которых описывают матричным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t); \quad \mathbf{x}(0), \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$  — действительный  $n$ -мерный вектор, отражающий текущее состояние системы, который называют *вектором фазовых координат* или *вектором состояния системы*;  $\mathbf{x}(0)$  — начальное состояние системы;  $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))^T$  — действительный  $m$ -мерный вектор управления, который называют *вектором входа системы*;  $\mathbf{F}$  — действительная векторная функция векторных аргументов;  $t$  — текущее непрерывное время.

Действительные выходные координаты системы образуют  $k$ -мерный вектор управляемых координат системы

$$\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t))^T,$$

который будем называть *вектором выхода системы*.

Вектор выхода полностью определяется вектором состояния

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)), \quad (2.2)$$

но кроме того может быть зависим от управления и времени.

Уравнения (2.1), (2.2) образуют *математическую модель системы*. В настоящем разделе будем рассматривать линейные математические модели, для которых уравнения (2.1), (2.2) принимают линейный вид:



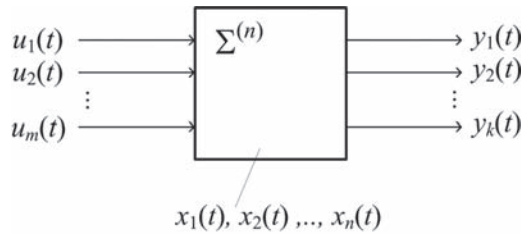


Рис. 2.2

Математическая модель автоматической системы

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t); & \mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t).\end{aligned}\quad (2.3)$$

Матрицы  $\mathbf{A}_{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}_{n \times m}$ ,  $\mathbf{C}_{k \times n}$  могут быть переменными или постоянными, в последнем случае модель системы называют *стационарной* или *моделью с постоянными параметрами*.

Линейная система полностью задана, если заданы: ее матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и начальное состояние  $\mathbf{x}(0)$ , что можно записать в виде

$$\Sigma^{(n)}: \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}; \quad \mathbf{x}(0).$$

При этом говорят, что система имеет порядок  $n$ , если ее вектор состояния имеет  $n$  координат.

Замена координат состояния системы, выполненная путем невырожденного преобразования:  $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ , порождает *эквивалентную модель системы*:

$$\Sigma^{(n)}: \mathbf{PAP}^{-1}, \mathbf{PB}, \mathbf{CP}^{-1}; \quad \mathbf{x}(0).$$

### Примеры:

**1.** Для электрической  $RLC$ -цепи, представленной на рис. 2.3, составить математическую модель.

Выберем в качестве координат состояния: токи в соответствующих ветвях цепи  $x_1 = i_1$ ,  $x_2 = i_2$  и заряд емкости  $x_3 = q$ . Система имеет один вход — напряжение питания и два выхода.

Переходные процессы в этой цепи описывают уравнения:

$$\begin{aligned}u &= i_1 R + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{q}{C}; \\ \frac{q}{C} &= L_2 \frac{di_2}{dt}; \\ i_1 &= i_2 + \frac{dq}{dt},\end{aligned}$$

а в терминах координат состояния принимают вид

$$\dot{x}_1 = -\frac{R}{L_1}x_1 - \frac{1}{L_1 C}x_3 + \frac{1}{L_1}u;$$

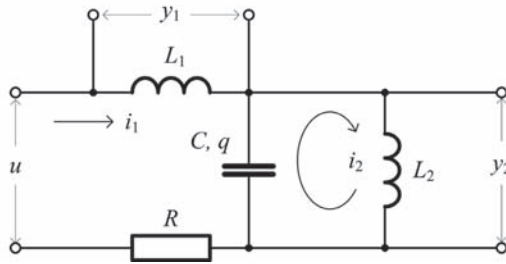


Рис. 2.3  
Модель электрической RLC-цепи

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \frac{1}{L_2 C} x_3; \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_2.\end{aligned}$$

Выходные координаты системы определяют соотношения:

$$\begin{aligned}y_1 &= u - \frac{q}{C} - i_1 R; \\ y_2 &= \frac{q}{C},\end{aligned}$$

а в терминах координат состояния соотношения можно представить как

$$\begin{aligned}y_1 &= -R x_1 - \frac{1}{C} x_3 + u; \\ y_2 &= \frac{1}{C} x_3.\end{aligned}$$

Заметим, что в данном случае координаты вектора выхода зависят не только от координат состояния, но и от управления:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u.$$

Рассматриваемая система имеет третий порядок и матрицы ее модели принимают вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -\frac{R}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1 C} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2 C} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -R & 0 & -\frac{1}{C} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D} = (1 \ 0)^T.\end{aligned}$$

**2.** Составить модель движения математического маятника в среде без сопротивления.

На основании законов механики движение математического маятника в среде без сопротивления описывает нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0; \quad \varphi(0), \dot{\varphi}(0).$$

Очевидными координатами состояния являются  $x_1 = \varphi$ ,  $x_2 = \dot{\varphi}$ , поэтому модель системы принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 \sin x_1; \quad x_1(0), x_2(0). \end{aligned}$$

Модель движения маятника при малых отклонениях принимает линейный вид:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t); \quad \mathbf{x}(0).$$

**3.** Составить модель движение под действием силы  $F(t)$  тележки массой  $M$ , которая испытывает сопротивление движению  $r(\dot{p})$ .

Согласно второму закону Ньютона движение тележки описывает дифференциальное уравнение второго порядка

$$M\ddot{p} = F(t) - r(\dot{p}),$$

где  $p(t)$ ,  $\dot{p}(t)$  — перемещение и скорость перемещения тележки.

Полагая  $r = k\dot{p}$ ,  $a = \frac{k}{M}$ ,  $u(t) = \frac{1}{M}F(t)$ , получим линейную модель движения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 + u(t); \quad x_1(0), x_2(0). \end{aligned}$$

**4.** Составить модель управляемого движения математического маятника массой  $m$  на подвижной платформе массой  $M$  под действием силы  $F(t)$ , без сопротивления движению.

Модель движения платформы без трения с математическим маятником описывают в неподвижной системе координат, представленной на рис. 2.4, а, в виде нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} M\ddot{p} &= F(t) - T \sin \psi; \\ m\ddot{\psi} &= T \sin \psi; \\ m\ddot{z} &= mg - T \cos \psi, \end{aligned}$$

где  $T$  — натяжение нити маятника;  $y = p - L \sin \psi$ ;  $z = L \cos \psi$ .

Введем переменные состояния системы, положив

$$x_1(t) = p(t), \quad x_2(t) = \dot{p}(t), \quad x_3(t) = \psi(t), \quad x_4(t) = \dot{\psi}(t),$$

а также обозначим  $u(t) = \frac{F(t)}{M}$ .

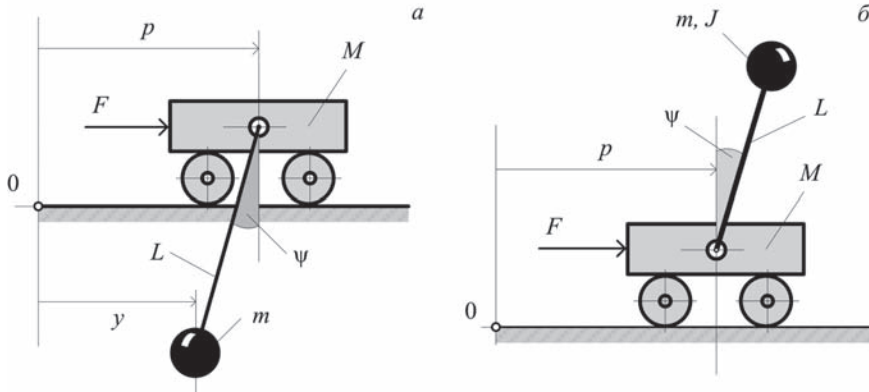


Рис. 2.4

Модель математического маятника на подвижной платформе:  
а — прямого; б — перевернутого.

Тогда математическую модель движения системы можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -a_1 \sin x_3 \cos x_3 - a_2 x_4^2 \sin x_3 + \frac{u(t)}{1 + a_3 \sin^2 x_3}; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= -a_4 \sin x_3 - a_3 x_4^2 \sin x_3 \cos x_3 + b_1 \cos x_3 \frac{u(t)}{1 + a_3 \sin^2 x_3}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{mg}{M}, \quad a_2 = \frac{m}{M}L, \quad a_3 = \frac{m}{M}, \\ a_4 &= \frac{m+M}{M}\omega^2, \quad \omega^2 = \frac{g}{L}, \quad b_1 = \frac{1}{L}. \end{aligned}$$

Полагая малыми колебания маятника, получаем линейную модель системы:

$$\Sigma^{(4)}: \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

**5.** Составить математическую модель перевернутого маятника на подвижной платформе, которая перемещается под действием силы  $F(t)$  и которая испытывает сопротивление  $k\dot{p}$ .

Модель составляют на основании второго закона Ньютона по расчетной схеме на рис. 2.3, б

$$\begin{aligned} \lambda \ddot{\psi} &= g \sin \psi - \ddot{p} \cos \psi; \\ M \ddot{p} &= F(t) - k\dot{p}, \end{aligned}$$

где  $\lambda = \frac{J + mL^2}{mL}$  — эффективная длина маятника;  $J$  — момент инерции маятника относительно своего центра тяжести;  $M, m$  — масса платформы и маятника соответственно.

Выбирая в качестве координат вектора состояния

$$x_1 = p, \quad x_2 = \dot{p}, \quad x_3 = p + \lambda\psi, \quad x_4 = \dot{p} + \lambda\dot{\psi}$$

и полагая колебания малыми, получим линейную модель движения перевернутого маятника на платформе:

$$\Sigma^{(4)} : \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{g}{\lambda} & 0 & \frac{g}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**6.** Составить модель движения механической системы, эквивалентное представление которой приведено на рис. 2.6, а. К одной из двух вертикально подвешенных на пружинах масс приложена управляющая сила. Пружины невесомые с линейными, но разными характеристиками. Движение масс сопровождается вязким сопротивлением.

Состояние системы можно описать четырьмя координатами:  $x_1, x_2$  — перемещение и скорость перемещения первой массы;  $x_3, x_4$  — перемещение и скорость перемещения второй массы.

Вектор управления содержит две компоненты: управляющую силу и ускорение земного притяжения  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g \end{pmatrix}$ . Математическая модель этой системы представлена матрицами состояния и управления соответственно:

$$\Sigma^{(4)} : \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{\zeta_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{\zeta_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{\zeta_1}{m_2} & -\frac{k_1 + k_2}{m_2} & -\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{m_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**7.** Составить математическую модель технологического процесса перемешивания двух потоков, содержащих разные вещества различной концентрации, схема которого приведена на рис. 2.6, б.

Модель представлена двумя уравнениями баланса масс и уравнением выхода:

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= F_1(t) + F_2(t) - F(t); \\ \frac{d(c(t)V(t))}{dt} &= c_1F_1(t) + c_2F_2 - c(t)F(t); \\ F(t) &= k\sqrt{V(t)}, \end{aligned}$$

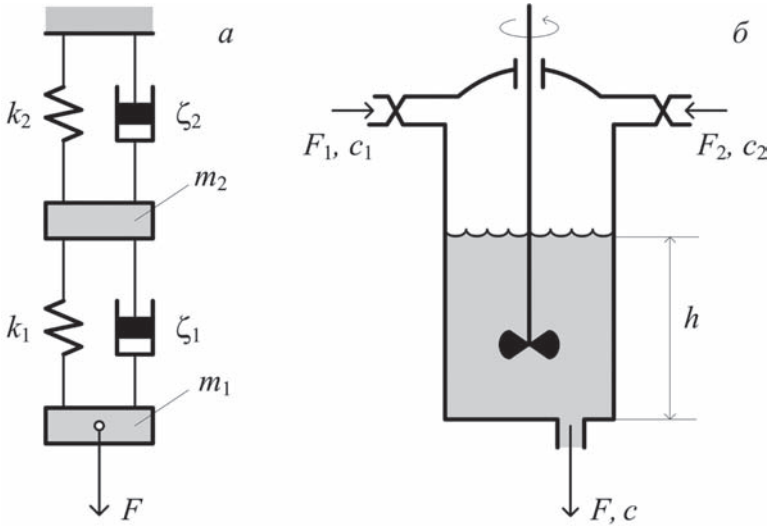


Рис. 2.5

Модель: а — механической системы; б — технологического процесса перемешивания.

где  $V(t)$  — объем жидкости в баке;  $F(t)$ ,  $c(t)$  — расход и концентрация выходного потока;  $c_1$ ,  $F_1(t)$ ,  $c_2$ ,  $F_2(t)$  — концентрация и расходы входных потоков соответственно;  $k$  — экспериментальная постоянная.

В этой системе входными переменными являются  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$ , а выходными —  $c(t)$ ,  $F(t)$ . Координатами состояния системы выбраны  $V(t)$ ,  $c(t)$  — текущие объем и концентрация смешанного продукта.

**8.** Составить математическую модель генератора постоянного тока в предположении постоянства частоты вращения якоря, отсутствия гистерезиса и полной компенсации реакции якоря.

Модель, составленная по эквивалентной схеме (рис. 2.5, а), представлена уравнением якорной цепи, характеристикой холостого хода и уравнением цепи возбуждения:

$$\begin{aligned} e_g &= u_g + R_r i_r + L_r \frac{di_r}{dt}; \\ e_g &= f(i_s); \\ u_s &= R_s i_s + L_s \frac{di_s}{dt}. \end{aligned}$$

**9.** Составить математическую модель двигателя постоянного тока независимого возбуждения, эквивалентная схема которого показана на рис. 2.5, б.

Модель описывает уравнение якорной цепи и внешнее уравнение:

$$\begin{aligned} u_m &= R_r i_r + L_r \frac{di_r}{dt} + k\omega; \\ J \frac{d\omega}{dt} &= k i_r - M_r, \end{aligned}$$

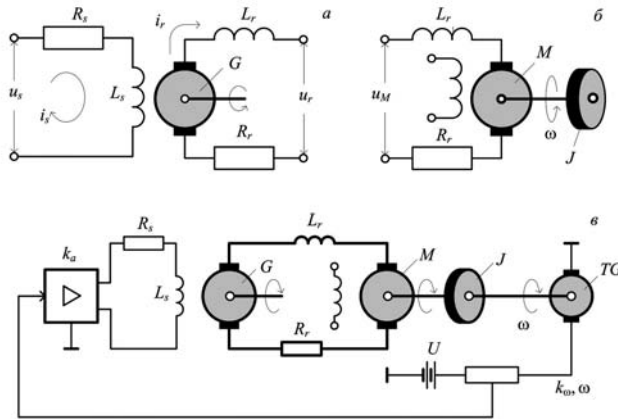


Рис. 2.6

Эквивалентные схемы моделей: а — генератора постоянного тока;  
 б — двигателя постоянного тока с независимым возбуждением;  
 в — электропривода со структурой генератор-двигатель.

где  $J$  — момент инерции якоря и нагрузки, приведенный к валу двигателя;  $k$  — конструктивная постоянная;  $M_r$  — момент сопротивления на валу двигателя.

**10.** На рис. 2.6, в представлена схема электропривода со структурой генератор-двигатель, который используется для регулирования частоты вращения рабочей машины. Составить математическую модель этого электропривода.

Линейную модель системы электропривода можно получить, используя модели примеров 8, 9, в предположении линейности характеристики холостого хода в окрестности рабочей точки. Модель содержит уравнения якорной цепи, цепи возбуждения генератора, нагрузки и уравнение замыкания:

$$\begin{aligned}
 e_g &= R_r i_r + L_r \frac{di_r}{dt} + k\omega; \\
 u_s &= R_s i_s + L_s \frac{di_s}{dt}; \\
 e_g &= R_s i_s; \\
 J \frac{d\omega}{dt} &= k i_r - M_r; \\
 u_s &= k_a (u - k_\omega \omega),
 \end{aligned}$$

где  $k_s$  — коэффициент наклона характеристики холостого хода;  $k_a$  — коэффициент усиления усилителя мощности;  $k_\omega$  — коэффициент передачи датчика частоты вращения.

Поскольку данная система третьего порядка, введем три координаты состояния:  $x_1 = e_g$ ,  $x_2 = i_r$ ,  $x_3 = \omega$ .

В этих условиях модель системы задается тремя матрицами:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & 0 & -k_s k_a k_\omega \frac{1}{L_r} \\ \frac{1}{L_r} & -\frac{R_r}{L_r} & -\frac{k}{L_r} \\ 0 & \frac{k}{J} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} k_s \frac{k_a}{L_s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (0 \ 0 \ k_\omega).$$

**11.** Составить математическую модель электродвигателя переменного тока.

В достаточно простых предположениях модель электродвигателя может быть представлена нелинейным уравнением первого порядка

$$J\dot{\omega} + k_v \omega + k_m \omega^3 + k_f \text{sign} \omega = kU,$$

где  $\omega$  — частота вращения вала двигателя;  $U$  — управляющее напряжение;  $J$  — момент инерции якоря;  $k_v$ ,  $k_m$ ,  $k_f$ ,  $k$  — коэффициенты скоростного трения, нелинейной механической характеристики, трения покоя и передаточный коэффициент соответственно.

**12.** Составить математическую модель движения второй ступени ракеты в предположении малости аэродинамических сил сопротивления и кривизны Земли.

Модель получена из условий равновесия сил и моментов, представленных на рис. 2.7, а:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= S \cos(\alpha + \zeta); \\ m\ddot{z} &= S \sin(\alpha + \zeta) - mg; \\ J\ddot{\zeta} &= -SL \sin \alpha, \end{aligned}$$

где  $m = (m_0 - \mu t)$  — переменная масса ракеты;  $J = km$  — переменный момент инерции ракеты;  $S$ ,  $L$ ,  $k$ ,  $\mu$  — постоянные параметры.

Выбрав в качестве координат состояния кинематические переменные:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = z, \quad x_4 = \dot{z}, \quad x_5 = \zeta, \quad x_6 = \dot{\zeta},$$

а в качестве управления — угловой наклон силы тяги  $u(t) = a(t)$ , получим модель движения ракеты:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= \frac{a_1}{1 - a_2 t} \cos(x_5 + u(t)); \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= \frac{a_1}{1 - a_2 t} \sin(x_5 + u(t)) - g; \end{aligned}$$



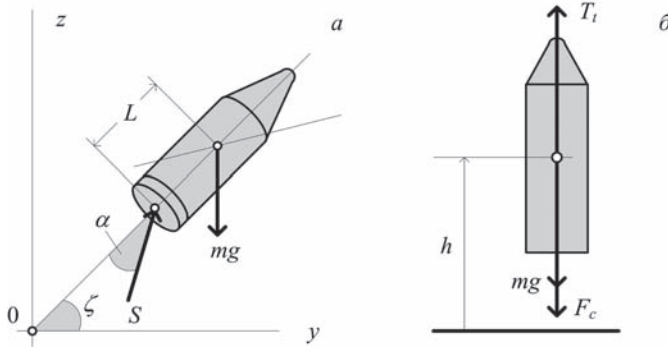


Рис. 2.7

Модели движения ракеты: а — второй ступени; б — вертикального движения.

$$\begin{aligned}\dot{x}_5 &= x_6; \\ \dot{x}_6 &= -\frac{a_3}{1 - a_2 t} \sin u(t),\end{aligned}$$

где  $a_1 = \frac{S}{m_0}$ ;  $a_2 = \frac{\mu}{m_0}$ ;  $a_3 = \frac{SL}{km_0}$ .

**13.** Составить модель вертикального движения ракеты, рассматривая ее как материальную точку переменной массы (рис. 2.7, б)

Модель вертикального движения ракеты на основе второго закона Ньютона представлена нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$m(t)\ddot{h} = T_t - T_c - m(t)g,$$

где  $T_t = k_t \dot{m}(t)$  — сила тяги ракеты;  $F_c = k_f(\dot{h})^2$  — сила аэродинамического сопротивления.

Введем координаты состояния  $x_1 = h$ ,  $x_2 = \dot{h}$ ,  $x_3 = m(t)$ .

Очевидно, управлением является сила тяги, выход модели — высота подъема. Сама модель движения имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k_f}{x_3} x_2^2 + \frac{u(t)}{x_3} - g; \\ \dot{x}_3 &= \frac{u(t)}{k_t}.\end{aligned}$$

**14.** Движение твердого тела с одной неподвижной точкой, на которое действует только сила тяжести, рассматривается относительно неподвижных осей жестко связанных с Землей, описывается тремя динамическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned}J_x \dot{\omega}_x &= (J_y - J_z)\omega_y \omega_z + M_x(t); \\ J_y \dot{\omega}_y &= (J_z - J_x)\omega_z \omega_x + M_y(t);\end{aligned}$$

$$J_z \dot{\omega}_z = (J_x - J_y) \omega_x \omega_y + M_z(t),$$

где  $J_x, J_y, J_z$  — моменты инерции относительно главных осей инерции;  $M_x, M_y, M_z$  — моменты действующих сил относительно главных осей инерции.

Описать составляющие математической модели этой системы.

Угловые скорости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой определяются кинематическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi},\end{aligned}$$

где  $\varphi, \psi, \theta$  — углы Эйлера, отражающие ориентацию главных осей относительно неподвижных осей.

Вектор состояния модели движения твердого тела содержит шесть координат:  $x_1 = \varphi, x_2 = \psi, x_3 = \theta, x_4 = \omega_x, x_5 = \omega_y, x_6 = \omega_z$ .

Управлением для системы является вектор моментов действующих сил, выходом — положение тела относительно подвижных осей или угловые скорости вращения тела.

### 2.3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

Представление нелинейной математической модели в виде линейной такое, что в некоторой области пространства состояния движения этих моделей оказываются достаточно *близкими*, называют *линеаризацией* этой нелинейной модели.

Пусть  $\mathbf{x}^0(t)$  — известное решение уравнения (2.1), называемое *номинальным*, которое получено при известном — номинальном управлении  $\mathbf{u}^0(t)$ .

Пусть функции  $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$  и  $\mathbf{G}(\mathbf{x}(t))$  непрерывно дифференцируемы по всем своим переменным. В этом случае в малой окрестности  $\mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}^0(t)$  возможно осуществить линеаризацию нелинейной модели (2.1). Положим

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^*(t) &= \mathbf{u}^0(t) + \mathbf{u}(t); \\ \mathbf{x}^*(t) &= \mathbf{x}^0(t) + \mathbf{x}(t),\end{aligned}\tag{2.4}$$

где  $\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)$  — реальное движение и реальное управление;  $\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)$  — малые *возмущения* номинальной траектории  $\mathbf{x}^0(t)$  и номинального управления  $\mathbf{u}^0(t)$ .

Подставим  $\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)$  в нелинейную модель (2.1) и разложим функцию  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  в окрестности  $\mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}^0(t)$  в ряд Тейлора, оставив от разложения только линейную часть:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^0(t) + \mathbf{x}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0, t) + \mathbf{J}_x(\mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0, t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{J}_u(\mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0, t))\mathbf{u}(t).$$

Здесь  $\mathbf{J}_x, \mathbf{J}_u$  — *матрицы Якоби* функции  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ , вычисленные в  $\mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}^0(t)$ .

Эти матрицы в общем случае могут зависеть от времени, но в данном случае являются постоянными:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{J}_x(\mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0, t)),$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{J}_u(\mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0, t)). \quad (2.5)$$

Эти матрицы называются соответственно *матрицей состояния* и *матрицей входа* искомой линейной модели (2.3) системы (2.1).

Начальным условием для полученной линейной модели является вектор

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0(0).$$

Аналогично осуществляем линейное приближение функции  $\mathbf{G}(\mathbf{x}(t))$  в окрестности  $\mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}^0(t)$ :

$$\mathbf{y}^0(t) + \mathbf{y}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{J}_x(\mathbf{G}(\mathbf{x}^0))\mathbf{x}(t), \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{y}^0(t)$  — вектор выхода, отвечающий номинальной траектории  $\mathbf{x}^0(t)$  и управлению  $\mathbf{u}^0(t)$ :  $\mathbf{y}^0(t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}^0)$ ;  $\mathbf{y}(t)$  — отклонение вектора выхода от номинального.

Матрица выхода линейной системы оказывается равной

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{J}_x(\mathbf{G}(\mathbf{x}^0)). \quad (2.7)$$

### Примеры:

1. Осуществить линеаризацию нелинейной математической модели технологического процесса перемешивания двух потоков, содержащих разные вещества различной концентрации (см. рис. 2.5, б):

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= F_1(t) + F_2(t) - F(t); \\ \frac{d}{dt}(c(t)V(t)) &= c_1F_1(t) + c_2F_2(t) - c(t)F(t); \\ F(t) &= k\sqrt{V(t)}. \end{aligned}$$

Для линеаризации модели процесса перемешивания потоков положим, что номинальный рабочий режим задают координатами состояния  $V^0, c^0$ , номинальными входными расходами  $F_1^0, F_2^0$  и номинальным выходным расходом  $F^0$ .

Для стационарного номинального режима справедливо, что

$$\begin{aligned} F_1^0 + F_2^0 - F^0 &= 0; \\ c_1F_1^0 + c_2F_2^0 - c^0F^0 &= 0; \\ F^0 &= k\sqrt{V^0}. \end{aligned}$$

Текущее состояние процесса, а также текущие значения входных расходов и выходные переменные расход и концентрацию представим в виде:

$$\begin{aligned} V(t) &= V^0 + x_1(t); \\ c(t) &= c^0 + x_2(t); \\ F_1(t) &= F_1^0 + u_1(t); \\ F_2(t) &= F_2^0 + u_2(t); \\ F(t) &= F^0 + y_1(t); \end{aligned}$$

$$c(t) = c^0 + y_2(t).$$

Линейное приближение функции  $F(t)$  в окрестности рабочего режима принимает вид

$$F(t) = F^0 + 0,5k \frac{1}{\sqrt{V^0}} x_1(t)$$

или, что одно и то же,

$$F(t) = F^0 + 0,5 \frac{F^0}{V^0} x_1(t).$$

Используя это приближение в уравнениях состояния процесса перемешивания, получим искомую линеаризованную модель процесса в окрестности рабочего режима:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -0,5\alpha x_1(t) + u_1(t) + u_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -0,5\alpha x_2(t) + \beta_1 u_1(t) + \beta_2 u_2(t); \\ y_1(t) &= 0,5\alpha x_1(t); \\ y_2(t) &= x_2(t), \end{aligned}$$

где  $\alpha = \frac{F^0}{V^0}$ ,  $\beta_1 = \frac{c_1 - c^0}{V^0}$ ,  $\beta_2 = \frac{c_2 - c^0}{V^0}$  — параметры модели.

Матрицы полученной линейной модели принимают вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0,5\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0,5\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**2.** Математическая модель движения маятника на подвижной платформе представляется системой нелинейных уравнений.

В случае, когда колебания маятника достаточно малы, в качестве *номинального движения* можно рассматривать точку относительного покоя маятника. Выполняем линеаризацию уравнений движения маятника в окрестности его точки покоя.

Линейная модель движения маятника приведена в 2.2, примеры 4, 5.

**3.** Модель генератора постоянного тока (2.2, пример 8) содержит нелинейную характеристику холостого хода, которая для целей линеаризации может быть спрямлена в окрестности рабочей точки. И тогда зависимость  $e_g = f(i_s)$  приближенно можно рассматривать в линейном виде  $e_g = k i_s$ , в котором  $k$  — значение углового наклона касательной к функции  $f(i_s)$  в рабочей точке.

**4.** Математическая модель двухфазного асинхронного двигателя с ортогональными обмотками управления и возбуждения содержит нелинейное уравнение моментов:  $J\dot{\omega} = M(\omega; u) + M_c$ , где  $\omega$  — частота вращения вала двигателя;  $J$  — момент инерции ротора и рабочего механизма, приведенный к валу двигателя;  $M$ ,  $M_c$  — вращающий момент и момент сопротивления на валу двигателя;  $u$  — напряжение управления.

Механические характеристики асинхронного двигателя  $M(\omega; u)$  представляется семейством кривых, отражающих зависимости частоты вращения от вращающего момента с параметром семейства — напряжение управления.

Линеаризация семейства механических характеристик осуществляется заменой кривых параллельными прямыми:  $M(\omega; u) = -k_1 \omega + k_2 u$ .

## 2.4. МОДЕЛИ ТИПА ВХОД-ВЫХОД

Математическая модель (2.3) описывает внутренние связи между переменными состояния системы, поэтому такие модели называют *моделями состояния* или **внутренними** моделями. Модели, отражающие зависимость между входными  $u(t)$  и выходными  $y(t)$  сигналами системы, называют моделями типа *вход-выход* или **внешними** моделями.

Пусть рассматривается линейная система с одним входом и одним выходом, процессы в которой описываются неоднородным линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_m u, \quad (2.8)$$

где  $u(t)$ ,  $u^{(q)}(t)$  — входной сигнал системы и  $q = \overline{1, m}$  его производные;  $y(t)$ ,  $y^{(k)}(t)$  — выходной сигнал системы и  $k = \overline{1, n}$  его производные.

Применив к уравнению *оператор дифференцирования Коши*  $D = \frac{d}{dt}$ , получим *операторное представление* уравнения системы:

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y(t) = (b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \dots + b_m) u(t).$$

Запишем это представление в иной форме

$$y(t) = \frac{B(D)}{A(D)} u(t),$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} B(D) &= b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \dots + b_{m-1} D + b_m, \\ A(D) &= a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Функция  $H(D) = \frac{B(D)}{A(D)}$  называется *операторной передаточной функцией системы*, а уравнение

$$y(t) = H(D) u(t) \quad (2.10)$$

— *операторной моделью системы*, или **внешней моделью системы**.

Полином  $A(D)$  является **характеристическим многочленом системы**, а его корни — **полюсы**, или **характеристические числа системы**. Корни полинома  $B(D)$  есть **нули системы**.

Представление внешней модели в частотной области позволяет осуществить преобразование Лапласа. Обозначим лапласовы преобразования входного и выходного сигналов

$$\begin{aligned} Y(s) &= \mathcal{L}[y(t)], \\ U(s) &= \mathcal{L}[u(t)], \end{aligned} \quad (2.11)$$

тогда моделью системы оказывается выражение

$$Y(s) = H(s) U(s), \quad (2.12)$$

полученное преобразованием при нулевых начальных условиях неоднородного линейного дифференциального уравнения (2.8).

Выражение  $H(s)$  называется **передаточной функцией системы**.

Очевидна взаимосвязь двух функций  $H(s)$  и  $H(D)$ .

Внешняя модель системы единственна, тогда как внутренних моделей у системы столько, сколько можно составить для нее векторов состояния.

В самом деле, пусть система, заданная матрицами  $\mathbf{A}_{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}_{n \times m}$ ,  $\mathbf{C}_{k \times n}$ , в начальном состоянии была в покое  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ . Преобразуем по Лапласу внутреннюю стационарную линейную модель системы (2.3)

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s), \quad \mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s),$$

где  $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{x}(t)]$ ,  $\mathbf{Y}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{y}(t)]$ ,  $\mathbf{U}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{u}(t)]$ .

Откуда находим, что

$$\mathbf{Y}(s) = (\mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B})\mathbf{U}(s). \quad (2.13)$$

Значит, по смыслу, в силу представления (2.10), выражение в скобках является **матричной передаточной функцией системы**:

$$\mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{H}(s), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{H}(s) = (H_{ij}(s))_{k \times m}.$$

Заметим, что если на вход системы подается единичный импульс, то поскольку  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1(t)$ , из выражения (2.12) следует соотношение  $Y(s) = H(s)$ . Это означает, что передаточную функцию можно рассматривать как преобразование Лапласа реакции системы на входной единичный импульс при отсутствии всех прочих внешних воздействий. А произвольный элемент  $H_{ij}(s)$  матричной передаточной функции в этом случае оказывается преобразованием Лапласа реакции на  $i$ -м выходе системы, если единичный импульс воздействует только на  $j$ -й вход системы.

Для эквивалентной модели системы

$$\Sigma^{(n)} : \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1} \quad (2.15)$$

передаточная функция, в силу (2.14), принимает вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}(s\mathbf{E} - \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1})^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}(s\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1})^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B} = \\ &= \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{P}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{P}^{-1})^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{H}(s). \end{aligned}$$

Таким образом, передаточная функция, а значит и внешняя модель системы, не зависят от выбора координат состояния и являются ее **инвариантами**.

## 2.5. ГРАФОВЫЕ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ

Графическое представление взаимосвязей в системе в виде **структурных схем** или **графов** используется в теории управления в той же мере, что и математические модели.

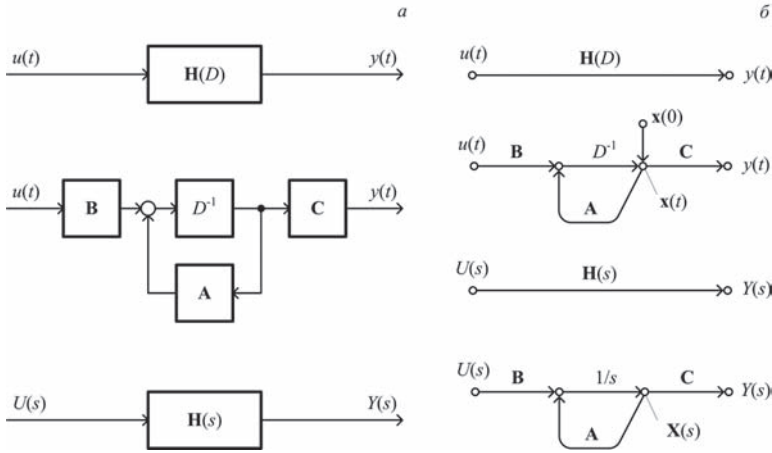


Рис. 2.8

Графическое представление моделей системы: а — блочное; б — графовое.

При построении структурной схемы могут быть использованы два графических выражения: в первом для изображения сигналов используются линии со стрелкой, операторы изображаются прямоугольником, операция суммирования — точкой или кружком; во втором случае точки используются для обозначения сигналов, а направленные дуги — для обозначения операторов. На рис. 2.8 приведены оба вида графического представления моделей системы.

Будем различать три основные операции над графовыми моделями систем — структурными схемами: *последовательное, параллельное и встречно-параллельное (с обратной связью) соединения* схем.

Пусть произвольная  $i$ -я схема имеет: вход —  $u_i$ , выход —  $y_i$  и передаточную функцию —  $W_i$ . В результате выполнения *операции над схемами* получается вновь схема, которая имеет: вход —  $u$ , выход —  $y$  и передаточную функцию —  $W$ .

Для последовательного соединения двух схем (рис. 2.9, а):  $u = u_1, y = y_2, u_2 = y_1, y_2 = W_2 y_1, y_1 = W_1 u_1$ , поэтому  $y = W_2 W_1 u$ . Значит передаточную функцию последовательного соединения двух схем следует вычислять по формуле:

$$W = W_2 W_1. \tag{2.16}$$

Для параллельного соединения двух схем (рис. 2.9, б) имеем:

$$u = u_1 = u_2, \quad y = y_1 + y_2, \quad y = (W_1 + W_2)u.$$

Значит передаточную функцию параллельного соединения двух схем следует вычислять по формуле:

$$W = W_1 + W_2. \tag{2.17}$$

Для встречно-параллельного соединения двух схем (рис. 2.9, в) имеем:

$$y = y_1, \quad u_1 = u + y_2, \quad y = W_1(u + y_2), \quad y_2 = W_2 y,$$

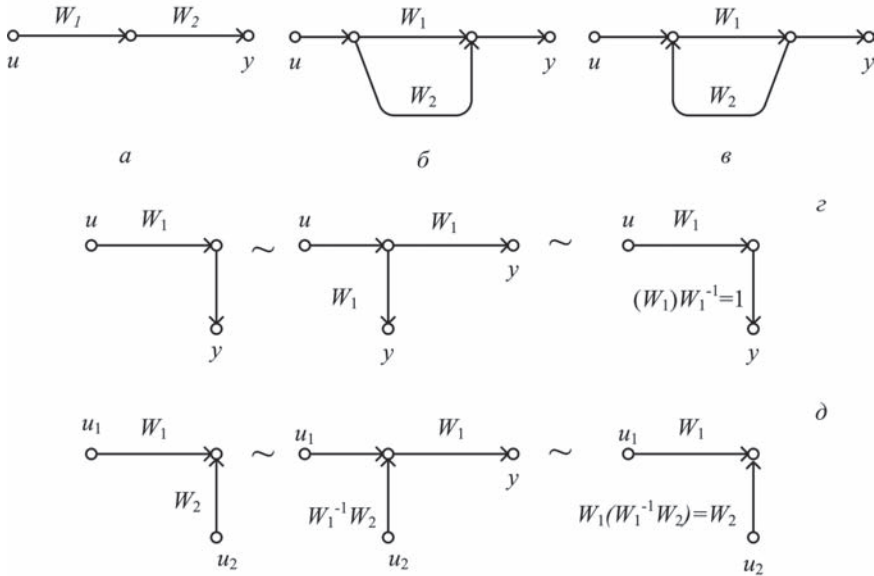


Рис. 2.9

Основные операции над графовыми моделями систем — а, б, в и правила эквивалентных преобразований схем — г, д.

поэтому для системы с одним входом и одним выходом

$$y = (1 - W_2 W_1)^{-1} W_1 u,$$

а в общем случае, при векторном входе и векторном выходе

$$y = (\mathbf{E} - \mathbf{W}_2 \mathbf{W}_1)^{-1} \mathbf{W}_1 u.$$

Откуда следует, что матричную передаточную функцию встречно-параллельного соединения двух схем следует вычислять по формуле:

$$\mathbf{W} = (\mathbf{E} - \mathbf{W}_2 \mathbf{W}_1)^{-1} \mathbf{W}_1. \quad (2.18)$$

Для схем с одним входом и одним выходом передаточную функцию соединения двух схем с отрицательной обратной связью вычисляют по формуле:

$$W = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2}. \quad (2.19)$$



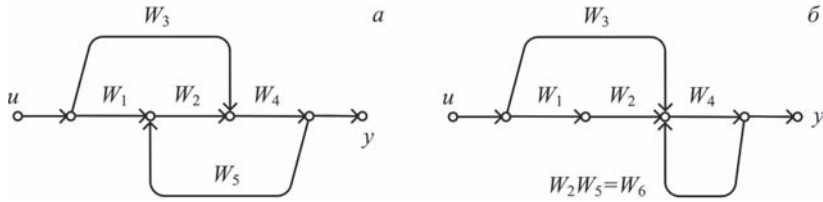


Рис. 2.10

Структурная схема системы: а — до преобразования, б — после преобразования.

Алгебра структурных схем и передаточных функций содержит правила эквивалентных преобразований схем, среди которых основными являются правила переноса точек суммирования и точек ветвления.

На рис. 2.9, з, д приведено графическое представление этих правил.

Алгоритмическую процедуру эквивалентных преобразований структурных схем и определения передаточной функции системы можно свести к трем шагам:

- выполнить перенос точек ветвления и суммирования так, чтобы в результирующей схеме образовались лишь последовательные, параллельные цепи и цепи обратных связей;
- выполнить операции соединения схем;
- составить передаточные функции схем соединений и всей системы.

### Примеры:

1. Найти передаточную функцию системы, линейная модель которой представлена матрицами:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0,5\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0,5\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно (2.12) передаточная функция системы приобретает вид:

$$\mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} \frac{0,5\alpha}{s + 0,5\alpha} & \frac{0,5\alpha}{s + 0,5\alpha} \\ \frac{\beta_1}{s + \alpha} & \frac{\beta_2}{s + \alpha} \end{pmatrix}$$

2. Найти передаточную функцию системы, структурная схема которой изображена на рис. 2.10, а.

После переноса точки суммирования, например так, как показано на рис. 2.10, б схема представляется в виде типовых соединений, что позволяет получить:

$$W_7 = W_1 W_2 + W_3, \quad W_8 = \frac{W_4}{1 - W_6 W_4}, \quad W_6 = W_2 W_5.$$

Окончательно, искомая передаточная функцию системы принимает вид:

$$H = W_8 W_7.$$

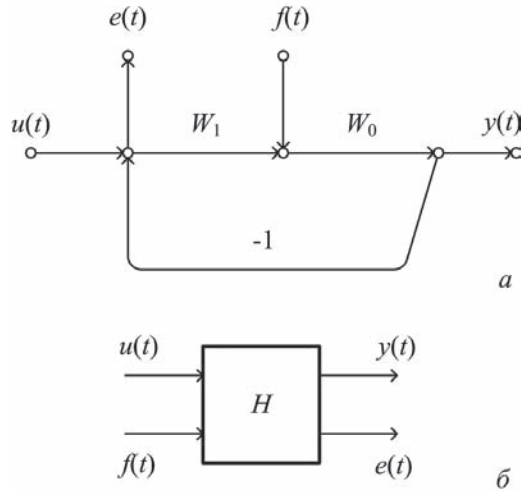


Рис. 2.11

Каноническая структура автоматической системы:  
а — в графовом представлении, б — в блочном виде.

3. Найти передаточную функцию автоматической системы, представленной **канонической структурой** (рис. 2.11, а), в которой объект управления и регулятор имеют передаточные функции  $W_0$ ,  $W_1$  соответственно. На систему воздействуют задающий сигнал  $u(t)$  и возмущение  $f(t)$ . Выход системы —  $y(t)$ . Если сигнал **рассогласования**, или **ошибку воспроизведения**

$$\varepsilon(t) = u(t) - y(t)$$

считать выходным сигналом, то систему следует рассматривать как имеющей два входа и два выхода (рис. 2.11, б) с матричной передаточной функцией:

$$\mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} H_{yu} & H_{yf} \\ H_{eu} & H_{ef} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Первая строка этой матрицы представлена передаточными функциями выхода от задающего и возмущающего воздействия соответственно, вторая строка — передаточными функциями ошибки от задания и возмущения. При этом:

$$\begin{aligned} H_{yu}(s) &= \frac{W_0(s)W_1(s)}{1 + W_0(s)W_1(s)}; \\ H_{yf}(s) &= \frac{W_0}{1 + W_0(s)W_1(s)}; \\ H_{eu}(s) &= 1 - H_{yu}(s); \\ H_{ef}(s) &= -H_{yf}(s). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Уравнение замкнутой автоматической системы канонической структуры в силу **принципа суперпозиции**, которому удовлетворяют линейные системы, принимает вид:

$$\begin{aligned} Y(s) &= H_{yu}(s)U(s) + H_{yf}(s)F(s); \\ E(s) &= (1 - H_{yu}(s))U(s) - H_{yf}(s)F(s), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где  $Y(s), U(s), F(s), E(s)$  — лапласовы преобразования выходного и входного сигналов, возмущения и сигнала ошибки соответственно.

## 2.6. ВЗАИМОСВЯЗЬ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМЫ

Внутренняя, внешняя и графовые модели системы взаимосвязаны. Внешняя модель однозначно определяется по своей структурной схеме и по внутренней модели согласно соотношению (2.14). Эквивалентные внутренние модели системы зависят от выбора координат состояния и поэтому неоднозначно восстанавливаются по внешней модели.

Пусть для некоторой системы с одним входом и одним выходом передаточная функция имеет частный вид:  $H(D) = \frac{1}{A(D)}$ , а многочлен

$$A(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

имеет действительные различные корни  $\{\lambda_i, \quad i = \overline{1, n}\}$ .

Рассмотрим для этого случая два из возможных представлений дробно-рационального выражения передаточной функции — *аддитивное* и *мультипликативное*:

$$\begin{aligned} H(D) &= \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{D - \lambda_i}; \\ H(D) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{D - \lambda_i}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

В первом — аддитивном случае введем координаты состояния по правилу:

$$x_i = \frac{1}{D - \lambda_i} u(t), \quad i = \overline{1, n},$$

но тогда  $\dot{x}_i = \lambda_i x_i + u(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  и выход системы определяется выражением

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i.$$

В этом случае внутренняя модель системы определяется матрицами:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \text{diag} (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n), \\ \mathbf{B} &= (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)^T, \end{aligned}$$

$$\mathbf{C} = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n).$$

Во втором — мультипликативном случае введем координаты состояния, например, по правилу:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{D - \lambda_1} u(t); \\ x_i &= \frac{1}{D - \lambda_{i-1}} x_{i-1}, \quad i = \overline{2, n}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + u(t); \\ \dot{x}_i &= \lambda_i x_i + x_{i-1}, \quad i = \overline{2, n} \end{aligned}$$

и выход системы  $y(t) = x_n$ .

В этом случае внутренняя модель системы определяется матрицами:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)^T, \quad \mathbf{C} = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1).$$

Пусть в общем случае дробно-рационального представления передаточной функции,  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  — различные действительные корни полинома  $A(D)$  и  $\gamma_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  — различные действительные корни полинома  $B(D)$ ,  $m \leq n$ .

Рассмотрим одно из возможных таких представлений:

$$H(D) = \prod_{j=1}^m \frac{D - \gamma_j}{D - \lambda_j} \prod_{k=m+1}^n \frac{1}{D - \lambda_k}.$$

Введем координаты состояния, например, по правилу:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\lambda_1 - \gamma_1}{D - \lambda_1} u(t), \quad z_1 = x_1(t) + u(t); \\ x_j &= \frac{\lambda_j - \gamma_j}{D - \lambda_j} z_j, \quad z_j = x_j + z_{j-1}, \quad j = \overline{2, m}; \\ x_{m+1} &= \frac{1}{D - \lambda_{m+1}} z_m; \\ x_k &= \frac{1}{D - \lambda_k} x_{k-1}, \quad k = \overline{(m+2), n}, \end{aligned}$$

где  $z_j$  — вспомогательные переменные.

В этих условиях

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + (\lambda_1 - \gamma_1)u(t); \\
 \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + (\lambda_2 - \gamma_2)z_1, \quad z_1 = x_1 + u(t); \\
 \dot{x}_3 &= \lambda_3 x_3 + (\lambda_3 - \gamma_3)z_2, \quad z_2 = x_2 + z_1; \\
 &\dots \\
 \dot{x}_m &= \lambda_m x_m + (\lambda_m - \gamma_m)z_{m-1}, \quad z_{m-1} = x_{m-1} + z_{m-2}; \\
 \dot{x}_{m+1} &= \lambda_{m+1} x_{m+1} + z_m, \quad z_m = x_m + z_{m-1}; \\
 \dot{x}_{m+2} &= \lambda_{m+2} x_{m+2} + x_{m+1}; \\
 &\dots \\
 \dot{x}_n &= \lambda_n x_n + x_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Выходная переменная системы  $y(t) = x_n$ , но тогда искомая внутренняя модель системы определяется матрицами:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (\lambda_2 - \gamma_2) & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (\lambda_3 - \gamma_3) & (\lambda_3 - \gamma_3) & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\lambda_m - \gamma_m) & (\lambda_m - \gamma_m) & \dots & \lambda_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \lambda_{m+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_{m+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B} = ( (\lambda_1 - \gamma_1) \ (\lambda_2 - \gamma_2) \ (\lambda_3 - \gamma_3) \ \dots \ (\lambda_m - \gamma_m) \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 )^T;$$

$$\mathbf{C} = ( 0 \ 0 \ \dots \ 1 ).$$

Рассмотрим для общего случая дробно-рационального представления передаточной функции иной, более простой, метод получения внутренней модели. Пусть

$$H(D) = \frac{b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \dots + b_{m-1} D + b_m}{D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n}, \quad m = (n-1).$$

Разделим числитель и знаменатель этого выражения на  $D^n$ :

$$H(D) = \frac{b_0 D^{-1} + b_1 D^{-2} + \dots + b_{n-2} D^{-(n+1)} + b_{n-1} D^{-n}}{1 + a_1 D^{-1} + \dots + a_{n-1} D^{-(n+1)} + a_n D^{-n}}.$$

Поскольку данное выражение является передаточным оператором, то справедливо, что

$$y(t)(1 + a_1 D^{-1} + \dots + a_n D^{-n}) = u(t)(b_0 D^{-1} + b_1 D^{-2} + \dots + b_{n-1} D^{-n}).$$

Откуда следует, что

$$y(t) = u(t)(b_0D^{-1} + b_1D^{-2} + \dots + b_{n-1}D^{-n}) - y(t)(a_1D^{-1} + \dots + a_nD^{-n}).$$

На рис. 2.12, а приведена структура, реализующая полученное соотношение. На этом основании введем координаты состояния так, что:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -a_n x_n + b_{n-1} u(t); \\ \dot{x}_2 &= x_1 - a_{n-1} x_n + b_{n-2} u(t); \\ \dot{x}_3 &= x_2 - a_{n-2} x_n + b_{n-3} u(t); \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= x_{n-1} - a_1 x_n + b_0 u(t),\end{aligned}$$

при этом выходная переменная системы  $y(t) = x_n$ .

### Примеры:

**1.** Изобразить структурную схему модели, представленной в канонической форме Коши.

Для передаточных функций частного вида  $H(D) = \frac{1}{A(D)}$ ,

$$A(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

каноническую форму представления внутренней модели, когда в качестве координат состояния принимают выходную переменную и ее  $n - 1$  производные:

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t), \quad x_3(t) = \dot{x}_2(t), \dots, x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t),$$

называют **нормальной, или канонической формой Коши**. Такое представление модели задается матрицами:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{1}{a_0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

Структурная схема модели в канонической форме Коши показана на рис. 2.12, б.

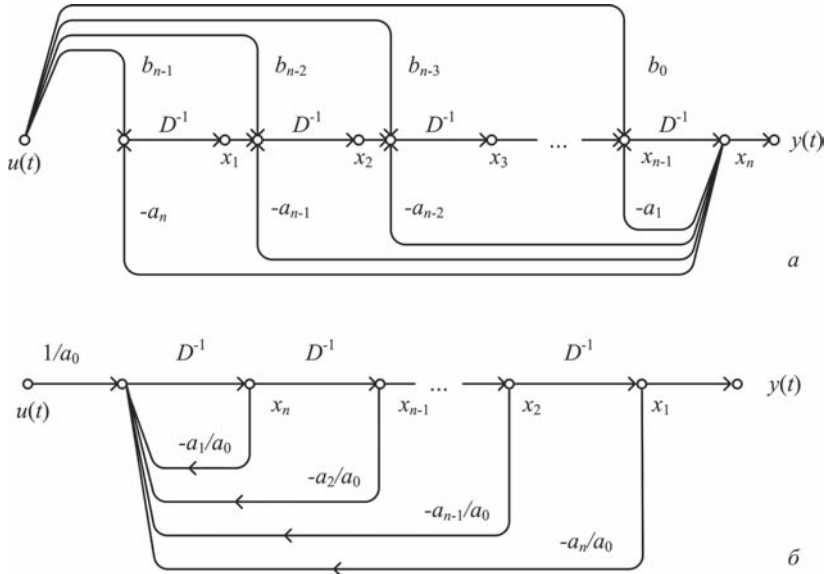


Рис. 2.12

Структурная схема модели: а – с передаточной функцией общего дробно-рационального вида; б – в канонической форме Коши.

2. Составить внутреннюю модель для системы с операторной передаточной функцией

$$H(D) = \frac{1}{D^3 + 3D^2 + 2D}.$$

Передаточная функция системы имеет три полюса  $\{0, -1, -2\}$ , поэтому ее аддитивное представление имеет вид:

$$H(D) = \frac{0,5}{D} - \frac{1}{D+1} + \frac{0,5}{D+2}.$$

Внутренняя модель системы задается матрицами:

$$\mathbf{A} = \text{diag} (0 \ -1 \ -2), \quad \mathbf{B} = (1 \ 1 \ 1)^T, \quad \mathbf{C} = (0,5 \ -1 \ 0,5).$$

При мультипликативном представлении передаточной функции системы

$$H(D) = \frac{1}{D(D+1)(D+2)}$$

введем координаты состояния по правилу:

$$x_1 = \frac{1}{D} u(t), \quad x_2 = \frac{1}{D+1} x_1, \quad x_3 = \frac{1}{D+2} x_2,$$

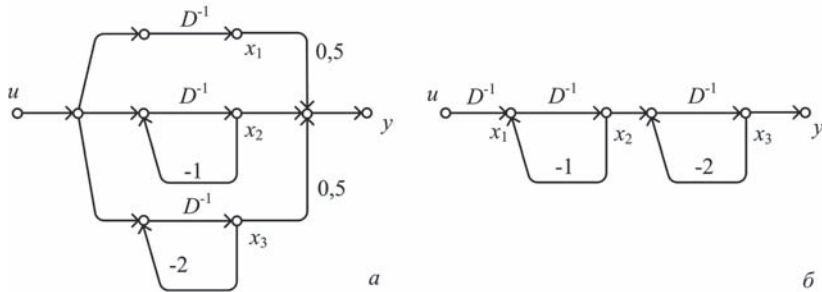


Рис. 2.13

Структурные схемы эквивалентных моделей: а — аддитивного; б — мультипликативного представления.

тогда матрицы внутренней модели системы примут вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (0 \ 0 \ 1).$$

Структурные схемы эквивалентных моделей изображены на рис. 2.13, а, б.

**3.** Составить внутреннюю модель для системы с операторной передаточной функцией общего вида:

$$H(D) = \frac{D^2 - D - 2}{D^3 - 2D^2 - 5D + 6}.$$

Эта функция имеет полюсы:  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 3$  и два нуля:  $\gamma_1 = -1$ ,  $\gamma_2 = 2$ , поэтому

$$H(D) = \frac{D+1}{D-1} \frac{D-2}{D-3} \frac{1}{D+2} = \left(1 + \frac{2}{D-1}\right) \left(1 + \frac{1}{D-3}\right) \frac{1}{D+2}.$$

Введем координаты состояния и вспомогательные переменные, например, по правилу:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{D-1} u(t), & z_1 &= x_1 + u(t); \\ x_2 &= \frac{1}{D-3} z_1, & z_2 &= z_1 + x_2; \\ x_3 &= \frac{1}{D+2} z_2. \end{aligned}$$

В этих условиях после исключения вспомогательных переменных  $z_1, z_2$  внутренняя модель системы приобретает вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2u(t); \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 3x_2 + u(t); \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 - 2x_3 + u(t); \end{aligned}$$



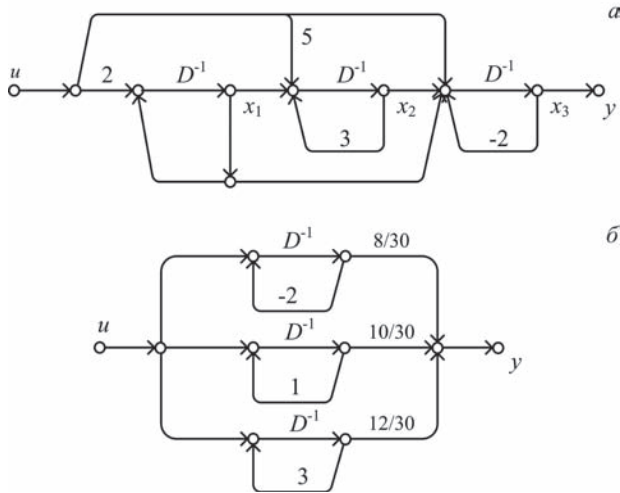


Рис. 2.14

Структурные схемы эквивалентных моделей: (а) — с использованием вспомогательных переменных, (б) — в аддитивном представлении.

$$y = x_3.$$

Структурное представление этой модели представлено на рис. 2.14, а.

Заметим, что этот пример можно решить, используя аддитивное представление

$$\text{передаточной функции: } H(D) = \frac{c_1}{D+2} + \frac{c_2}{D-1} + \frac{c_3}{D-3}.$$

Для определения постоянных  $c_1, c_2, c_3$  составляем уравнения:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 1; \\ 4c_1 + c_2 - c_3 &= 1; \\ 3c_1 - 6c_2 - 2c_3 &= -2, \end{aligned}$$

откуда находим:  $c_1 = 0,267$ ,  $c_2 = 0,333$ ,  $c_3 = 0,4$ . Координаты состояния введем, например, по правилу:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{D+2} u(t); \\ x_2 &= \frac{1}{D-1} u(t); \\ x_3 &= \frac{1}{D-3} u(t). \end{aligned}$$

В этих условиях внутренняя модель системы приобретает вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + u(t); \\ \dot{x}_2 &= x_2 + u(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= 3x_3 + u(t); \\ y &= 0,267x_1 + 0,333x_2 + 0,4x_3,\end{aligned}$$

а значит матрицы этой системы имеют вид:

$$\mathbf{A} = \text{diag}(-2 \ 1 \ 3), \quad \mathbf{B} = (1 \ 1 \ 1)^T, \quad \mathbf{C} = (0,267 \ 0,333 \ 0,4).$$

Рассмотрим еще одно тождественное представление исходной передаточной функции:

$$H(D) = \frac{D^{-1} - D^{-2} - 2D^{-3}}{1 - 2D^{-1} - 5D^{-2} + 6D^{-3}},$$

которое получается после деления числителя и знаменателя передаточной функции на  $D^3$ . После чего следует, что

$$(1 - 2D^{-1} - 5D^{-2} + 6D^{-3})y(t) = (D^{-1} - D^{-2} - 2D^{-3})u(t).$$

Следовательно,

$$y(t) = (D^{-1} - D^{-2} - 2D^{-3})u(t) + (2D^{-1} + 5D^{-2} - 6D^{-3})y(t).$$

В этих условиях внутренняя модель системы приобретает вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -6x_3 - 2u(t); \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 5x_3 - u(t); \\ \dot{x}_3 &= x_2 + 2x_3 + u(t); \\ y &= x_3,\end{aligned}$$

а значит матрицы этой системы имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (0 \ 0 \ 1).$$

Структурные схемы эквивалентных моделей изображены на рис. 2.14.

**4.** Для системы, эквивалентное представление которой изображено на рис. 2.5, а, ранее в 2.2 была составлена модель состояния, построить графовую модель и составить внешнюю модель *управляющая сила-перемещение первой массы*.

Графовая модель системы представлена на рис. 2.15.

Внешняя модель системы *управляющая сила-перемещение первой массы* принимает вид:

$$W(s) = \frac{m_2 s^2 + (\zeta_1 + \zeta_2)s + (k_1 + k_2)}{\Delta};$$

$$\begin{aligned}\Delta &= m_1 m_2 s^4 + (m_1 \zeta_1 + m_1 \zeta_2 + m_2 \zeta_1) s^3 + \\ &+ (m_1 k_1 + m_1 k_2 + m_2 k_1 + \zeta_1 \zeta_2) s^2 + (k_1 \zeta_2 + k_2 \zeta_1) s + k_1 k_2.\end{aligned}$$

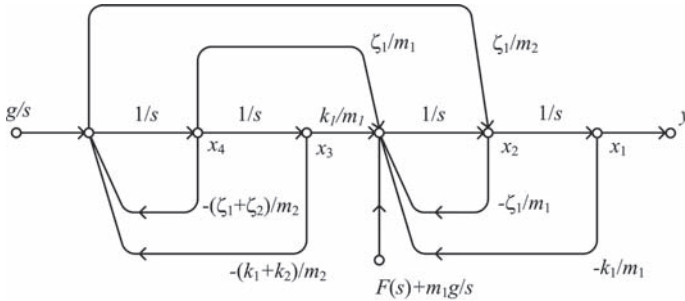


Рис. 2.15

Графовая модель механической системы, изображенной на рис. 2.5, а

5. Составить внешнюю модель системы системы стабилизации толщины прокатываемого стального листа, функциональная схема которой представлена на рис. 2.16. Толщина проката 1 изменяется с помощью обжимных валков 2. Усилие обжатия, создаваемое устройством 3, пропорционально углу поворота двигателя 4, который управляется со стороны якорной цепи через линейный усилитель 5. Суммарный момент инерции  $J$  обжимного устройства и двигателя, приведенный к валу двигателя, полагается неизменным. Регулятор 6 имеет известную передаточную функцию  $G(s)$ . Толщина прокатываемого стального листа измеряется датчиком 7, который отстоит от места изменения толщины на известном расстоянии  $\rho$ . Полоса проката перемещается равномерно со скоростью  $v$ .

Внешняя модель этой системы  $W_y(s)$ : ошибка в толщине листа — толщина листа имеет вид:

$$W_y(s) = \frac{Ck_1k_2}{s(JLs^2 + JRs + C^2)}G(s)e^{-\tau s},$$

где  $C$  — конструктивная постоянная двигателя;  $\tau = \frac{\rho}{v}$  — величина запаздывания сигнала о толщине листа.

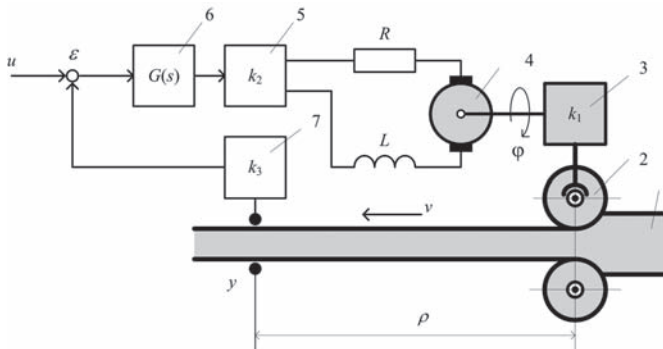


Рис. 2.16

Функциональная схема системы стабилизации толщины прокатываемого стального листа

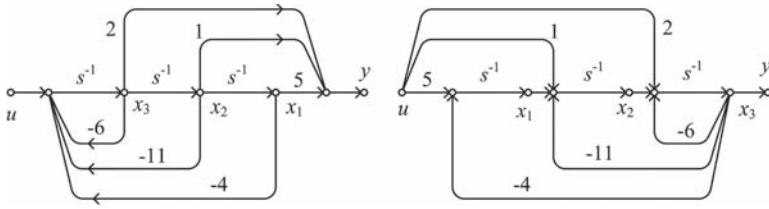


Рис. 2.17

Две эквивалентные структуры моделей

**6.** На рис. 2.17 изображены две структуры. Показать, что эти структуры эквивалентны. Поскольку внешняя модель системы является ее инвариантом, то для проверки эквивалентности двух структур следует проверить совпадение их передаточных функций.

По графовым моделям структур следует составить их внутренние модели:

$$\Sigma_1 : \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -11 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = (5 \ 1 \ 2);$$

$$\Sigma_2 : \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = (0 \ 0 \ 1),$$

а затем и внешние, которые оказываются равными

$$W(s) = \frac{2s^2 + s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 4}.$$

## 2.7. УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Записать матричные представления линейных моделей для систем из 2.2 примеров 2, 3, 4. Изобразить структурные схемы этих моделей.

**2.** Составить внутреннюю модель движения системы, изображенной на рис. 2.18, а: колебание массы, закрепленной на жестком стержне, который удерживается в равновесии пружиной жесткости  $k$  и демпфером с линейной характеристикой  $\zeta\dot{\varphi}$ .

**3.** Малые движения двух связанных маятников единичной массы, показанных на рис. 2.18, б, описываются линейными уравнениями:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} + \omega^2\psi + \epsilon^2(\psi - \sigma) &= 0; \\ \ddot{\sigma} + \omega^2\sigma - v^2(\psi - \sigma) &= 0, \end{aligned}$$

где  $\omega^2 = \frac{g}{L}$ ;  $v^2 = k\frac{\lambda}{L}$ ;  $L, \lambda$  — длина маятника и естественная длина пружины соответственно;  $k$  — жесткость пружины.

Ввести координаты состояния:  $x_1 = \zeta$ ,  $x_2 = \dot{\zeta}$ ,  $x_3 = \sigma$ ,  $x_4 = \dot{\sigma}$ . Составить матричную и структурную модели движения. Произвести линейную замену переменных:

$$z_1 = x_1 + x_3; \quad z_2 = x_2 + x_4;$$

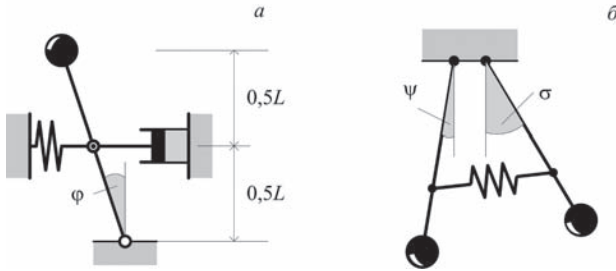


Рис. 2.18

Модели колебательной механической системы: а — перевернутый маятник на жестком стержне; б — связанные маятники.

$$z_3 = x_1 - x_3; z_4 = x_2 - x_4.$$

Составить модели движения в новых переменных.

4. Выполнить линеаризацию модели:

- системы

$$\dot{x}_1 = \exp(x_1 + x_2) - x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_1 x_2,$$

в окрестности неподвижной точки  $x^0 = (-1 \ 1)^T$ ;

- устройства для измерения угловой частоты вращения вала турбины:

$$\ddot{y} + k_1 \dot{y} + k_2 y^3 = k_3 \omega,$$

где  $\omega$  — угловая частота вращения вала;  $y$  — сигнал измерителя.

Линеаризацию выполнить в окрестности опорного движения  $(\omega^0, y^0)$ .

5. На рис. 2.19, а изображена схема электромеханической системы управления положением стального шарика. Электромагнит развивает усилие, пропорциональное квадрату тока и обратно пропорциональное расстоянию до шарика. Состояние системы определяется тремя координатами: положение и скорость перемещения шарика, ток в обмотке электромагнита.

Составить модель состояния системы, выполнить в окрестности начального положения:  $x(0) = (\alpha \ 0 \ \sqrt{mg})^T$  линеаризацию этой модели.

6. Определить передаточную функцию системы, структурная схема которой представлена на рис. 2.19, б.

7. Следящая система управления по азимуту радиотелескопом имеет структуру, изображенную на рис. 2.19, в. Выход системы:  $y_1(t)$  — угол поворота основания телескопа и  $y_2(t)$  — угол поворота диска антенны. Вход:  $u(t)$  — задание на разворот и возмущение  $f(t)$  — момент сопротивления ветра. Промежуточные переменные:  $m_1$  — движущий момент привода,  $m_2$  — момент упругости опор и  $\omega$  — угловая частота вращения вала привода;  $k_1, k_2$  — коэффициенты наклона внешней характеристики

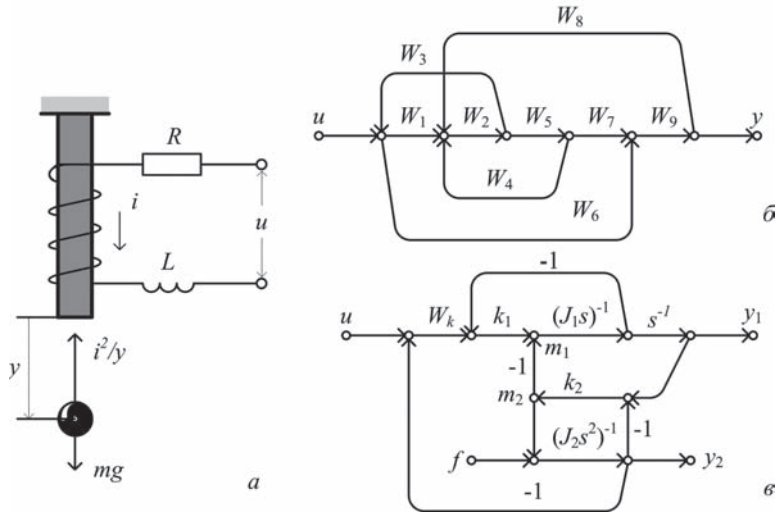


Рис. 2.19

Электромеханическая система управления положением стального шарика (а). Структурные схемы: электромеханической системы (б) и следящей системы управления по азимуту радиотелескопом (в)

привода и упругость опор соответственно.  $W_k$  — передаточная функция корректирующего звена.

Найти передаточные функции системы по заданию, по возмущению.

8. Определить передаточную функцию системы, заданной в виде:

- $y^{(3)}(t) + 6\ddot{y}(t) + 11\dot{y}(t) - 5y(t) = \ddot{u}(t) + 2\dot{u}(t) + u(t)$ ;
- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ;
- $\ddot{y}_1 + 5\dot{y}_1 - 5y_1 = \dot{u}_1 + u_1 + 4u_2$ ;  
 $\dot{y}_2 + 2y_2 = u_1 + u_2$ .

9. Для системы с передаточной функцией  $H(s)$ :

- $\frac{12}{s^3 + 6s^2 + 5s - 12}$ ;
- $\frac{(s+1)(s-2)}{s^2 + s - 2}$

получить эквивалентные внутренние модели в мультипликативной, аддитивной и нормальной формах. Построить структурные схемы этих моделей.

10. На рис. 2.20 представлены четыре структуры автоматических систем воспроизведения входного задающего сигнала, построенных на основе канонической структуры, изображенной на рис. 2.10, в.

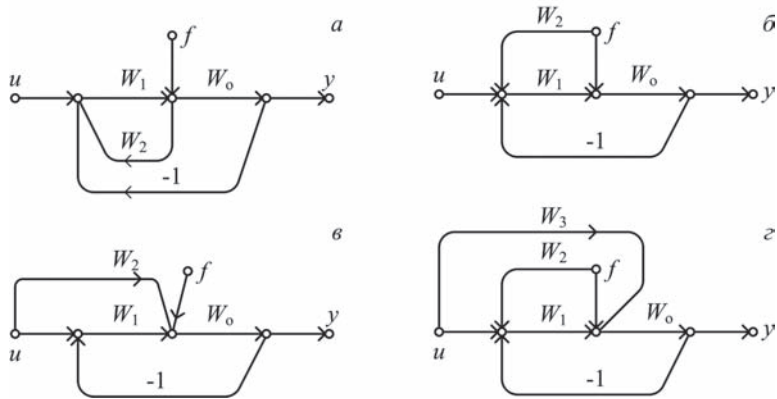


Рис. 2.20

Структуры автоматических систем воспроизведения входного задающего сигнала:  
 а — с положительной обратной связью регулятора; б — с коррекцией по возмущению;  
 в — с компенсацией возмущения; г — с комбинированной коррекцией.

В этих структурах неизменяемая часть имеет передаточную функцию  $W_0$ , остальные элементы — управляющие и корректирующие звенья.

Записать для каждой структуры уравнение выхода и уравнение ошибки, найти условия безошибочного воспроизведения задания и условия компенсации возмущения.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

- Примеры цифровых систем управления
- Модели состояния дискретной системы
- Передаточные функции линейной дискретной системы
- Взаимосвязь моделей системы
- Модуляционная внешняя модель дискретной системы
- Упражнения

### 3.1. ПРИМЕРЫ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

*Дискретные системы* отличаются от непрерывных тем, что среди сигналов, действующих в системе имеются так называемые *дискретные сигналы*.

Дискретные сигналы получаются из непрерывных квантованием по уровню, по времени или одновременно и по уровню, и по времени. Сигналы, квантованные по уровню, имеют место в *релейных системах*, в *импульсных системах* имеются сигналы квантованные по времени.

*Цифровыми* называют системы, в которых используются сигналы квантованные и по времени, и по уровню. Системы, в структуре которых используются цифровые устройства, контроллеры, микропроцессоры, управляющие вычислительные комплексы, очевидно, являются дискретными, ведь цифровой код — это сигнал, квантованный одновременно по времени и по уровню.

Примером цифровой системы является система управления шаговым двигателем для позиционирования схвата руки робота. Шаговый двигатель поворачивает свой вал на угол, пропорциональный числу импульсов, которое в свою очередь отвечает коду угла позиционирования. Таким образом, структура системы содержит контроллер, преобразующее устройство *код-число импульсов*, шаговый двигатель и в обратной связи цифровой датчик положения.

Классическим примером дискретных автоматических систем являются системы, использующие в контуре управления цифровые регуляторы. Непрерывный сигнал рассогласования, поступающий на вход регулятора, преобразуется в последовательность импульсов, которые являются цифровым кодом сигнала ошибки. Эта последовательность импульсов преобразуется в соответствии с выбранным законом регулирования в другую последовательность импульсов, которые цифроаналоговым устройством преобразуются в выходной непрерывный сигнал регулятора.



Из рассмотренных в первой главе автоматических систем дискретными являются: система углового сопровождения радиотелескопа, система регулирования толщины стального проката, система управления движением манипуляционного робота, система автоматического слежения за целью.

### 3.2. МОДЕЛИ СОСТОЯНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

Математические модели дискретных систем управления описывают поведение этих систем только в *квантованные* моменты времени:

$$t_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Дискретным представлением непрерывных сигналов  $u(t), y(t)$  и координат состояния  $x(t)$  являются последовательности:

$$\{u(t_k)\}, \quad \{y(t_k)\}, \quad \{x(t_k)\}.$$

Математические модели дискретных систем устанавливают взаимосвязь между этими последовательностями.

Дискретные автоматические системы управления содержат в своей структуре *цифровую* (дискретную) и *аналоговую* (непрерывную) части. Для согласования этих частей в системе используются *цифроаналоговый* и *аналого-цифровой преобразователи*.

Преобразователь *аналог-цифра* — *идеальный импульсный элемент* ставит в соответствие непрерывной функции  $f(t), \quad t \geq t_0$  последовательность

$$\{f(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots\} = f^*(t),$$

называемую *решетчатой функцией*.

Преобразователь *цифра-аналог* осуществляет преобразование последовательности  $\{f(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots\}$  в некоторую непрерывную функцию  $\hat{f}(t)$ , которая является аппроксимацией исходной

$$\hat{f}(t) \simeq f(t), \quad t \geq t_0.$$

Наиболее часто используют кусочно-постоянную аппроксимацию, поэтому такой преобразователь называют *экстраполятором*, или *фиксатором нулевого порядка*.

Построение дискретного представления непрерывной системы носит название процесса *дискретизации*, или *квантования* непрерывной системы.

Пусть линейная непрерывная стационарная система порядка  $n$  представлена своей внутренней моделью:

$$\Sigma^{(n)}: \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); & \mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Будем предполагать, что все переменные системы квантуются синхронно с постоянным шагом:

$$\forall k, t_{k+1} - t_k = h,$$

поэтому  $t_k = kh$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . При этом будем считать эквивалентными обозначения  $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}(kh) = \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_k$ .

В общем случае состояние на текущий момент времени  $t$  непрерывной системы  $\Sigma^{(n)}$ :  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ , которая движется из начального состояния  $\mathbf{x}(t_k)$ , можно записать в форме Коши:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_k)}\mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Поскольку преобразователь *цифра-аналог* является фиксатором нулевого порядка, то на любом интервале  $[t_k, t_{k+1})$  управление сохраняет свое значение  $u(k)$ , поэтому на интервале  $[0, t_1)$  состояние

$$\mathbf{x}(1) = e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x}(0) + \left( \int_0^h e^{\mathbf{A}(h-\tau)}d\tau \right) \mathbf{B}\mathbf{u}(0).$$

На интервале  $[t_1, t_2)$

$$\mathbf{x}(2) = e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x}(1) + \left( \int_h^{2h} e^{\mathbf{A}(2h-\tau)}d\tau \right) \mathbf{B}\mathbf{u}(1).$$

Вообще, на интервале  $[t_k, t_{(k+1)})$

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x}(k) + \left( \int_{kh}^{(k+1)h} e^{\mathbf{A}((k+1)h-\tau)}d\tau \right) \mathbf{B}\mathbf{u}(k).$$

Заметим, что все интегралы, стоящие в скобках, равны. Действительно, сделав в интеграле две замены:  $z = \tau - kh$ ,  $h - z = \theta$ , получим

$$\int_{kh}^{(k+1)h} e^{\mathbf{A}((k+1)h-\tau)}d\tau \Big|_{z=\tau-kh} = \int_0^h e^{\mathbf{A}(h-z)}dz \Big|_{\theta=h-z} = \int_0^h e^{\mathbf{A}\theta}d\theta = \text{const}.$$

Обозначив

$$\mathbf{M} = e^{\mathbf{A}h}, \quad \mathbf{N} = \left( \int_0^h e^{\mathbf{A}\theta}d\theta \right) \mathbf{B}, \quad (3.1)$$

получим уравнения состояния системы в квантованные моменты времени — *дискретную внутреннюю модель* системы:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(n)}: \quad \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k); \quad \mathbf{x}(0), h, \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Эта модель при известной входной последовательности

$$\{\mathbf{u}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots\}$$

позволяет, выполнив итерации, найти решение:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \mathbf{M}\mathbf{x}(0) + \mathbf{N}\mathbf{u}(0); \\ \mathbf{x}(2) &= \mathbf{M}\mathbf{x}(1) + \mathbf{N}\mathbf{u}(1) = \mathbf{M}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{M}\mathbf{N}\mathbf{u}(0) + \mathbf{N}\mathbf{u}(1); \\ \mathbf{x}(3) &= \mathbf{M}\mathbf{x}(2) + \mathbf{N}\mathbf{u}(2) = \mathbf{M}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{M}^2\mathbf{N}\mathbf{u}(0) + \mathbf{M}\mathbf{N}\mathbf{u}(1) + \mathbf{N}\mathbf{u}(2); \\ &\dots \\ \mathbf{x}(k) &= \mathbf{M}^k\mathbf{x}(0) + \mathbf{M}^{k-1}\mathbf{N}\mathbf{u}(0) + \mathbf{M}^{k-2}\mathbf{N}\mathbf{u}(1) + \dots + \mathbf{N}\mathbf{u}(k-1) = \\ &= \mathbf{M}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{M}^{k-1-i}\mathbf{N}\mathbf{u}(i). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Матрицы дискретной модели системы  $\Sigma^{(n)}$ :  $(\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C})$  называют *матрицами состояния, входа и выхода* системы соответственно.

Пусть теперь непрерывная модель представлена своей внешней моделью в виде дифференциального уравнения:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \dots + a_n y(t) = u(t). \quad (3.4)$$

При достаточно малом шаге квантования дискретизацию этой модели можно выполнить с необходимой точностью путем замены дифференциалов конечными разностями:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{d}{dt} y(t_k) \approx \frac{\Delta y(t_k)}{h} = \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h}; \\ \ddot{y}(t) &= \frac{d^2}{dt^2} y(t_k) \approx \frac{\Delta^2 y(t_k)}{h^2} = \\ &= \frac{\Delta y(t_{k+1}) - \Delta y(t_k)}{h} = \frac{y(t_{k+2}) - 2y(t_{k+1}) + y(t_k)}{h^2}, \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

**Дискретная внешняя модель** системы имеет конечно-разностный вид

$$\left( \frac{a_0}{h^n} \Delta^n + \frac{a_1}{h^{n-1}} \Delta^{n-1} + \frac{a_2}{h^{n-2}} \Delta^{n-2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{h} \Delta + a_n \right) y(t_k) = u(t_k),$$

который после соответствующих алгебраических преобразований принимает рекуррентную форму

$$\alpha_0 y(k+n) + \alpha_1 y(k+n-1) + \alpha_2 y(k+n-2) + \dots + \alpha_n y(k) = u(k),$$

где  $\alpha_j$ ,  $j = \overline{0, n}$  — коэффициенты модели.

Движение дискретной модели, представленной в разностном виде, складывается из двух движений: собственного и вынужденного под действием внешнего возмущения.

Собственное движение — решение однородного разностного уравнения системы. Общий вид этого решения определяется как линейная форма от собственных чисел системы. Когда собственные числа  $\{\lambda_j, j = \overline{1, n}\}$  системы — простые действительные, удовлетворяющие характеристическому уравнению

$$\alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n = 0,$$

то искомое решение принимает вид:

$$y(k) = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k + \dots + c_n \lambda_n^k,$$

в котором коэффициенты линейной формы  $c_j, j = 1, 2, \dots, n$  вычисляются через начальные состояния системы.

Разностная внешняя модель дискретной системы может быть преобразована во внутреннюю матричную модель системы, если ввести координаты состояния системы. Например, по правилу Коши:

$$\begin{aligned} y(k) &= x_1(k); \\ y(k+1) &= x_2(k) = x_1(k+1); \\ &\dots \\ y(k+n-1) &= x_n(k) = x_{n-1}(k+1); \\ y(k+n) &= \frac{1}{\alpha_0} (-\alpha_1 x_n(k) - \alpha_2 x_{n-1}(k) - \dots \\ &\dots - \alpha_n x_1(k) + u(k)) = x_n(k+1). \end{aligned}$$

Теперь внутренняя дискретная модель принимает вид:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k); \\ x_2(k+1) &= x_3(k); \\ &\dots \\ x_{n-1}(k+1) &= x_n(k); \\ x_n(k+1) &= \frac{1}{\alpha_0} (-\alpha_n x_1(k) - \alpha_{n-1} x_2(k) - \dots - \alpha_1 x_n(k) + u(k)), \end{aligned}$$

а ее матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\alpha_n}{\alpha_0} & -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0} & -\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_0} & \dots & -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{\alpha_0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 0 \ \dots \ 0).$$

**Примеры:**

1. Непрерывная система имеет модель

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= u(t); \quad x(0); \\ y(t) &= x_1(t).\end{aligned}$$

Найти матрицы дискретной модели этой системы.

Известно, (см. А.1) что экспоненциал матрицы можно найти, используя преобразование Лапласа:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1},$$

поэтому в данном случае

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1} \left( \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix}^{-1} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На этом основании находим

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \int_0^h \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5h^2 \\ h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 0).$$

2. Составить дискретную модель непрерывной системы управления положением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} u(t); \quad \mathbf{x}(0).$$

Экспоненциал матрицы состояния системы равен

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1} \left( \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s + \alpha \end{pmatrix}^{-1} \right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) \\ 0 & e^{-\alpha t} \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha h}) \\ 0 & e^{-\alpha h} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{N} &= \int_0^h \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\theta}) \\ 1 & e^{-\alpha\theta} \end{pmatrix} d\theta \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha^2}(\alpha h + e^{-\alpha h} - 1) \\ 1 - e^{-\alpha h} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Положим,  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 0,8$  и  $h = 0,1$ , получим

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0,0787 \\ 0 & 0,6065 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0,00441 \\ 0,06296 \end{pmatrix}.$$

3. Составить с шагом дискретизации  $h = 0,1с$  дискретную модель непрерывной системы управления, заданной передаточной функцией

$$H(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+3)}.$$

Процедуру дискретизации удобно выполнять по внутренней модели системы, поэтому представим в операторной форме внешнюю модель

$$y(t) = \frac{10}{D(D+1)(D+3)} u(t),$$

затем введем координаты состояния системы по правилу

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{10}{D+3} u(t); \\ x_2(t) &= \frac{1}{D+1} x_1(t); \\ x_3(t) &= \frac{1}{D} x_2(t). \end{aligned}$$

В результате получена внутренняя модель

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -3x_1(t) + 10u(t); \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t); \\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t); \\ y(t) &= x_3(t) \end{aligned}$$

или матричном виде:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (0 \ 0 \ 1).$$

Для составления матрицы состояния дискретной модели  $\mathbf{M} = e^{A_h}$  вычислим экспоненциал матрицы состояния  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} e^{A_t} &= \mathcal{L}^{-1}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \begin{pmatrix} s+3 & 0 & 0 \\ -1 & s+1 & 0 \\ 0 & -1 & s \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0,5(e^{-3t} - e^{-t}) & e^{-t} & 0 \\ 0,167e^{-3t} - 0,5e^{-t} + 0,333 & 1 - e^{-t} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь матрица состояния дискретизированной системы принимает вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} e^{-3h} & 0 & 0 \\ 0,5(e^{-3h} - e^{-h}) & e^{-h} & 0 \\ 0,167e^{-3h} - 0,5e^{-h} + 0,333 & 1 - e^{-h} & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу выхода дискретизированной системы

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \int_0^h \begin{pmatrix} e^{-3\theta} & 0 & 0 \\ 0,5(e^{-3\theta} - e^{-\theta}) & e^{-\theta} & 0 \\ 0,167e^{-3\theta} - 0,5e^{-\theta} + 0,333 & 1 - e^{-\theta} & 1 \end{pmatrix} d\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,333(1 - e^{-3h}) \\ -0,167e^{-3h} + 0,5e^{-h} - 0,333 \\ 0,056e^{-3h} + 0,5e^{-h} + 0,333h - 0,444 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь с учетом шага дискретизации  $h = 0,1$ с окончательно получаем

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,741 & 0 & 0 \\ -0,082 & 0,905 & 0 \\ 0,004 & 0,095 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0,086 \\ -0,004 \\ 0,0001 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (0 \ 0 \ 1).$$

4. Непрерывная система описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = u(t); \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0,5.$$

Выполнить с шагом квантования  $h = 0,1$ с разностную дискретизацию этого уравнения

$$100(y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)) + 50(y(k+1) - y(k)) + 6y(k) = u(k).$$

После преобразований получим искомую дискретную модель в рекуррентном виде:

$$y(k+2) - 1,5y(k+1) + 0,56y(k) = 0,01u(k).$$

Собственное движение этой модели описывается уравнением

$$y(k) = c_0 0,8^k + c_1 0,7^k,$$

поскольку характеристическое уравнение системы  $\lambda^2 - 1,5\lambda + 0,56 = 0$  имеет корни:  $\lambda_1 = 0,8$  и  $\lambda_2 = 0,7$ . Постоянные  $c_0, c_1$  найдем, используя данные о начальном состоянии системы

$$\begin{aligned} y(0) &= c_0 + c_1 = 1; \\ y(1) &= 0,8c_0 + 0,7c_1. \end{aligned}$$

Значение  $y(1)$  определим, используя первую разность

$$\dot{y}(0) \approx 10(y(1) - y(0)) = 0,5;$$

откуда  $y(1) = 1,05$ . Теперь находим, что  $c_0 = 3,5$  и  $c_1 = -2,5$ . Таким образом, свободное движение дискретной модели можно представить выражением

$$y(k) = 3,5(0,8^k) - 2,5(0,7^k).$$

5. Дискретная система описывается разностной моделью

$$y(k+2) - 6y(k+1) + 12y(k) = u(k)$$

с начальными условиями  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = -0,5$ . Найти свободное движение этой системы.

Характеристическое уравнение системы

$$\lambda^2 - 6\lambda + 12 = 0$$

имеет два комплексных корня  $3 \pm j\sqrt{3}$ , поэтому решение ищется в виде

$$y(k) = 12^k \left( c_1 \cos \frac{\pi}{3}k + c_2 \sin \frac{\pi}{3}k \right).$$

Для определения постоянных воспользуемся начальными условиями

$$y(0) = c_1 = 1, \quad y(1) = 12 \left( \cos \frac{\pi}{3} + c_2 \sin \frac{\pi}{3} \right) = -0,5,$$

поэтому  $c_2 = -7,5$ .

$$\text{Искомое решение } y(k) = 12^k \left( \cos \frac{\pi}{3}k - 7,5 \sin \frac{\pi}{3}k \right).$$

### 3.3. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

Дискретным аналогом оператора дифференцирования Коши  $D = d/dt$  непрерывных функций является **оператор  $R$  сдвига вперед**, который определяется соотношением:

$$Rf(k) = f(k+1). \quad (3.6)$$

Инверсией оператора сдвига вперед является **оператор  $R^{-1}$  сдвига назад**

$$R^{-1}f(k+1) = f(k),$$

который является дискретным аналогом оператора интегрирования.

Оператор сдвига позволяет упростить аналитическую работу с разностными моделями дискретной системы. Используя понятие оператора сдвига, можно ввести понятие дискретной операторной передаточной функция.

Действительно, пусть модель дискретной системы с одним входом и одним выходом представлена разностным уравнением общего вида:

$$y(k+n) + \alpha_1 y(k+n-1) + \dots + \alpha_n y(k) = \beta_0 u(k+m) + \beta_1 u(k+m-1) + \dots + \beta_m u(k).$$

Запишем это уравнение в операторной форме:

$$(R^n + \alpha_1 R^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} R + \alpha_n) y(k) = (\beta_0 R^m + \beta_1 R^{m-1} + \dots + \beta_{m-1} R + \beta_m) u(k).$$



Обозначим многочлены:

$$\begin{aligned} R^n + \alpha_1 R^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} R + \alpha_n &= F_n(R), \\ \beta_0 R^m + \beta_1 R^{m-1} + \dots + \beta_{m-1} R + \beta_m &= G_m(R) \end{aligned}$$

и их отношение

$$\frac{G_m(R)}{F_n(R)} = H(R). \quad (3.7)$$

Теперь модель дискретной системы принимает простой вид:

$$F_n(R)y(k) = G_m(R)u(k) \quad \text{или} \quad y(k) = H(R)u(k). \quad (3.8)$$

Выражение  $H(R)$  называют **дискретной операторной передаточной функцией системы**.

Пусть теперь дискретная система имеет векторный вход и векторный выход и описывается матричной моделью состояний:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k); \quad \mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k). \end{aligned}$$

Применив к этой модели оператор сдвига вперед, получим

$$\mathbf{x}(k) = (\mathbf{R}\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\mathbf{u}(k),$$

а затем  $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(\mathbf{R}\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\mathbf{u}(k)$ .

Выражение  $\mathbf{C}(\mathbf{R}\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}$  приобретает смысл **матричной дискретной операторной передаточной функции системы**

$$\mathbf{H}(R) = \mathbf{C}(\mathbf{R}\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}. \quad (3.9)$$

Дискретная операторная передаточная функция является внешней моделью системы, она определяет отношение *вход-выход* системы и поэтому не должна быть зависимой от выбора внутренних координат состояния. Докажем справедливость этого утверждения.

Пусть изначально система имеет вектор состояния  $\mathbf{x}$  и определяется тройкой матриц:  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{C}$  и дискретная операторная передаточная функция системы равна

$$\mathbf{H}_x(R) = \mathbf{C}(\mathbf{R}\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}.$$

Пусть над вектором состояния  $x$  выполнено невырожденное преобразование с матрицей  $\mathbf{T}$ . В новых координатах состояния  $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$  система задается матрицами:

$$\mathbf{T}\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{T}\mathbf{N}, \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}.$$

Найдем дискретную операторную передаточную функцию, соответствующую этим матрицам

$$\mathbf{H}_z(R) = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{R}\mathbf{E} - \mathbf{T}\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1})^{-1}\mathbf{T}\mathbf{N}.$$

Выполним в этом выражении тождественные преобразования

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_z(R) &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{R}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T}\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1})^{-1}\mathbf{T}\mathbf{N} = \\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}(\mathbf{R}\mathbf{E} - \mathbf{M})\mathbf{T}^{-1})^{-1}\mathbf{T}\mathbf{N} = \\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{R}\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{N} = \mathbf{H}_x(R). \end{aligned}$$

Действительно дискретная операторная передаточная функция системы не зависит от выбора координат состояния, и поэтому является *инвариантом системы*.

Основным аналитическим аппаратом исследования разностных моделей является, так называемое, *Z-преобразование*, которое является дискретным аналогом преобразования Лапласа. Определение и свойства Z-преобразования можно найти в (А.3).

Применим Z-преобразование к внутренней модели системы.

$$\begin{aligned} z(\mathbf{X}(z) - \mathbf{x}(0)) &= \mathbf{M}\mathbf{X}(z) + \mathbf{N}\mathbf{U}(z); \\ \mathbf{Y}(z) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(z), \end{aligned}$$

где Z-преобразования соответствующих функций:

$$\mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{x}(k)]; \quad \mathbf{Y}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{y}(k)]; \quad \mathbf{U}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{u}(k)].$$

Откуда получаем выражения для преобразованного вектора состояния и вектора выхода системы — дискретные аналоги формулы Коши движения непрерывной системы:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= (z\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1}(z\mathbf{x}(0) + \mathbf{N}\mathbf{U}(z)); \\ \mathbf{Y}(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1}z\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\mathbf{U}(z). \end{aligned}$$

Теперь, аналогично тому, как это делалось в непрерывных системах, введем понятие передаточной функции. Положим, что дискретная система в начальный момент была в покое:  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ , тогда

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\mathbf{U}(z),$$

поэтому выражение

$$\mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{H}(z) \tag{3.10}$$

приобретает смысл *передаточной функции дискретной системы*.

Отметим очевидную связь между понятиями дискретной операторной передаточной функции и передаточной функции дискретной системы. После формальной замены оператора  $R$  на комплексную переменную  $z$  получаем выражение для передаточной функции дискретной системы, если в начальный момент система была в покое.

### 3.4. ВЗАИМОСВЯЗЬ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМЫ

Структурная модель дискретной системы, представленная на рис. 3.1, содержит непрерывную часть, которая может быть задана в виде передаточной функции  $W(s)$  или тройкой матриц  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ . Моделями дискретной системы является передаточная функция  $W(z)$  или тройка матриц  $\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C}$ . Почти все взаимосвязи между этими моделями установлены, осталось найти связь между внешними моделями непрерывной и дискретной систем.

Пусть на вход непрерывной системы поступает единичный ступечатый сигнал, но чтобы это обеспечить необходимо на вход преобразователя *цифра-аналог* подавать импульсную последовательность

$$u(kh) = 1, \quad k = 0, 1, \dots$$

$Z$ -преобразование этой последовательности

$$\mathcal{Z}[u(kh) = 1] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{z}{z-1}.$$

Преобразование Лапласа реакции непрерывной части системы, передаточная функция которой равна  $W(s)$ , на единичное входное воздействие равно  $\frac{W(s)}{s}$ .

Выходной сигнал непрерывной части системы проходит через идеальный квантователь и превращается в импульсную последовательность  $y(kh) = 1, \quad k = 0, 1, \dots$ , которая является, таким образом, реакцией на входное единичное дискретное воздействие  $u(kh) = 1, \quad k = 0, 1, \dots$ .

Обозначим  $Z$ -преобразование этой реакции через  $Y(z)$ . Ясно, что

$$Y(z) = \mathcal{Z}[y(kh)] = \mathcal{Z}[y(t) : t = t_k] = \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]] = \mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right]\right].$$

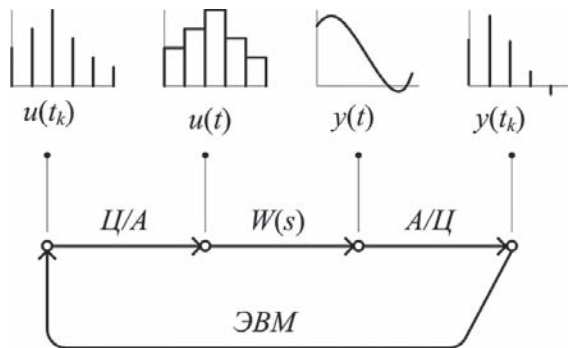


Рис. 3.1

Структурная модель дискретной системы

С другой стороны

$$Y(z) = \frac{z-1}{z}W(z),$$

значит искомая передаточная функция дискретной системы может быть найдена из выражения

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{W(s)}{s} \right] \right]. \quad (3.11)$$

Рассмотрим еще одну взаимосвязь моделей. Собственные числа непрерывной части системы, задаваемой матрицами  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ , являются характеристическими числами матрицы  $\mathbf{A}$ :  $\{\lambda_i(\mathbf{A})\}$ . Характеристические числа дискретной системы, задаваемой матрицами  $(\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C})$ , являются собственными числами матрицы  $\mathbf{M}$ :  $\{\lambda_i(\mathbf{M})\}$ . Но, поскольку  $\mathbf{M} = e^{\mathbf{A}h}$ , то

$$\lambda_i(\mathbf{M}) = e^{\lambda_i(\mathbf{A})h}.$$

Конформное преобразование  $z = e^{sh}$  осуществляет отображение полюсов непрерывной системы из комплексной  $s$ -плоскости в полюсы дискретной системы на комплексную  $z$ -плоскость.

Комплексная функция  $z = e^{sh}$ , являясь  $\frac{2\pi}{h}j$ -периодической, отображает каждую бесконечную левую полуполосу  $s$ -плоскости шириной  $\frac{2\pi}{h}$  во внутренность единичного круга  $z$ -плоскости. Так, для полосы

$$-\frac{\pi}{h} \leq \text{Im } s \leq \frac{\pi}{h}$$

действительная левая полуось переходит в отрезок  $(0, 1)$ , границы полосы переходят в отрезок  $(-1, 0)$ , отрезок мнимой оси  $\left(-j\frac{\pi}{h}, j\frac{\pi}{h}\right)$  переходит в окружность  $|z| = 1$ .

Таким образом, процесс дискретизации непрерывной системы осуществляет конформное отображение левой  $s$ -комплексной полуплоскости во внутренность единичного круга  $z$ -комплексной плоскости.

### Примеры:

1. Найти дискретное операторное представление непрерывной модели

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= u(t); \quad x(0), \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

После выполнения процесса конечно-разностной аппроксимации искомое представление принимает вид:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + hx_2(k) + 0,5h^2u(k); \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + hu(k); \quad x(0), \\ y(k) &= x_1(k), \end{aligned}$$

поэтому дискретная операторная передаточная функция системы

$$H(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R-1 & -h \\ 0 & R-1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0,5h^2 \\ h \end{pmatrix} = 0,5h^2 \frac{R+1}{(R-1)^2}.$$

**2.** Составить внутреннюю модель для системы, которая описывается рекуррентным соотношением

$$y(k+2) + 4y(k+1) + 6y(k) = u(k).$$

Найти реакцию системы на входную последовательность

$$u(k) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

если ее начальное состояние:  $y(0) = 2, y(1) = 1$ .

Для составления внутренней модели введем координаты состояния по схеме Коши, для чего положим  $y(k) = x_1(k), y(k+1) = x_2(k)$ , тогда

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k); \\ x_2(k+1) &= -6x_1(k) - 4x_2(k) + u(k); \quad x_1(0) = 2, x_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, внутренняя модель системы определяется матрицами

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 0); \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Входная последовательность — единичные импульсы, поэтому состояние системы на первом шаге определяется выражением

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{M}\mathbf{x}(0) + \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Состояние системы на втором шаге определяется выражением

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{M}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{M}\mathbf{N} + \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -15 \\ 55 \end{pmatrix}$$

и на третьем шаге —

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{M}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{M}^2\mathbf{N} + \mathbf{M}\mathbf{N} + \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 56 \\ -129 \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $y(k) = x_1(k)$ , то искомая выходная последовательность принимает вид:  $y(k) = \{2, 1, -15, 56, \dots\}$ .

**3.** Найти выходную последовательность системы, если известно ее  $Z$ -преобразование:

$$\mathcal{Z}[y(k)] = Y(z) = \frac{4z-1}{2z^2 - z + 0,25}.$$

Представим  $Z$ -изображение выходного сигнала как отношение полиномов по степеням  $z^{-1}$

$$Y(z) = \frac{4z^{-1} - z^{-2}}{2 - z^{-1} + 0,25z^{-2}}.$$

Разделив числитель на знаменатель, получим бесконечный степенной ряд, коэффициенты которого являются искомыми дискретами функции выхода

$$Y(z) = 2z^{-1} + 0,5z^{-2} + 0,0625z^{-4} + 0,03125z^{-5} + 0,0078z^{-6} + \dots$$

Таким образом, выходная последовательность принимает вид:

$$y(k) = \{0; 2; 0,5; 0; 0,0625; 0,03125; 0,0078; \dots\}.$$

4. Модель дискретной системы, представлена рекуррентным уравнением

$$y(k+2) + 0,5y(k+1) + 0,2y(k) = u(k+1) - 0,4u(k),$$

составить внешнюю модель ситемы в виде передаточной функции.

Применив к рекуррентному уравнению оператор сдвига вперед, получим соотношение

$$(R^2 + 0,5R + 0,2)y(k) = (R - 0,4)u(k).$$

Полагая нулевыми начальные условия, находим искомую внешнюю модель системы

$$W(z) = \frac{z - 0,4}{z^2 + 0,5z + 0,2}.$$

5. Найти реакцию дискретной системы на единичное ступенчатое воздействие, если ее передаточная функция имеет вид

$$H(z) = \frac{z + 2}{(z - 0,2)(z + 0,5)}.$$

$Z$ -преобразование выходной реакции системы определяется выражением

$$Y(z) = \frac{z(z + 2)}{(z - 1)(z - 0,2)(z + 0,5)}.$$

Для определения  $Z$ -оригинала этого выражения, представим его в виде суммы правильных дробей:

$$Y(z) = \frac{2,5z}{(z - 1)} + \frac{1,43z}{(z + 0,5)} - \frac{3,93z}{(z - 0,2)},$$

а затем для каждой постой дроби записываем  $Z$ -оригинал:

$$y(k) = 2,5 + 1,43(-0,5)^k - 3,93(0,2)^k.$$

6. Найти передаточную функцию разомкнутой дискретной системы, содержащей последовательно соединенные идеальный квантователь с периодом квантования  $h = 0,5$ с, восстановитель нулевого порядка и непрерывное звено с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{5}{s(s + 2)},$$

может быть найдена из выражения (3.11):

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{W(s)}{s} \right] \right] = \frac{0,46z + 0,33}{(z-1)(z-0,368)}.$$

7. Дискретная система канонической структуры с единичной отрицательной обратной связью, содержит в прямом тракте последовательно соединенные непрерывную часть с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{130,5}{s(s+361,2)},$$

идеальный импульсный прерыватель и фиксатор нулевого порядка.

Найти передаточную функцию замкнутой системы и ее характеристические числа, если шаг дискретизации составляет  $h = 0,001$ с.

Дискретная передаточная функция разомкнутой части системы согласно (3.11) принимает вид

$$W(z) = \frac{0,058z + 0,0514}{z^2 - 1,697z + 0,697}.$$

Дискретная передаточная функция замкнутой системы представляется выражением

$$H(z) = \frac{0,058z + 0,0514}{z^2 - 1,639z + 0,748},$$

откуда находим, что искомые характеристические числа замкнутой системы равны  $\lambda_{1,2} = 0,819 \pm j0,276$ .

### 3.5. МОДУЛЯЦИОННАЯ ВНЕШНЯЯ МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

Структурная схема дискретной модели, изображенная на рис. 3.1, позволяет создавать два типа внешних моделей: в первом случае предполагается, что входным и выходным сигналами системы являются дискретные сигналы и для этого мысленный разрыв выполняется в цифровой части между аналого-цифровым и цифроаналоговым преобразователями, во втором случае мысленный разрыв выполняется в аналоговой части между объектом и аналого-цифровым преобразователем, поэтому входной и выходной сигналы системы оказываются непрерывными.

Первый тип дискретного представления внешних моделей изучен в 3.3. Структура второго типа внешних моделей дискретной системы содержит последовательно соединенные квантователь (аналого-цифровой преобразователь), контроллер и цепь восстановления (цифроаналоговый преобразователь), которые выполняют функции амплитудного модулятора. Входной непрерывный сигнал, пройдя через квантователь, модулируется последовательностью прямоугольных импульсов, далее этот сигнал, обработанный в компьютере, вновь превращается в аналоговый на выходе. Используем эту идеализацию для построения внешней модуляционной модели дискретной системы.

Будем называть **дискретным представлением**, или **решетчатой функцией**  $f^*(t)$  непрерывного сигнала  $f(t)$  выражение

$$f^*(t) = f(t) \sum_{k \geq 0} \delta(t - kh) = \sum_{k \geq 0} f(kh) \delta(t - kh). \quad (3.12)$$

Определим преобразование Лапласа решетчатой функции и отметим два важных свойства этого преобразования

$$F^*(s) = \mathcal{L}[f^*(t)] = \sum_{k \geq 0} f(kh) \mathcal{L}[\delta(t - kh)] = \sum_{k \geq 0} f(kh) e^{-skh}. \quad (3.13)$$

Первое свойство устанавливает связь между тремя преобразованиями непрерывной функции  $f(t)$ : преобразованием Лапласа и ее  $Z$ -преобразованием  $F(s) \rightarrow F(z)$  и преобразованием Лапласа и ее решетчатой функцией  $F(s) \rightarrow F^*(s)$ .

$$F^*(s) = F(z = e^{sh}) = \frac{1}{h} \sum_{k \geq 0} F(s + jk\omega_q), \quad (3.14)$$

где  $\omega_q = \frac{2\pi}{h}$  — частота квантования.

Второе свойство решетчатой функции состоит в том, что  $F^*(s)$  является  $j\omega_q$ -периодической функцией.

Действительно,

$$\begin{aligned} F^*(s + jm\omega_q) &= \sum_{k \geq 0} f(kh) \exp\{-(s + jm\omega_q)kh\} = \\ &= \sum_{k \geq 0} f(kh) e^{-skh} \exp\{-jm\omega_q kh\} = \sum_{k \geq 0} f(kh) e^{-skh} = F^*(s), \end{aligned}$$

потому, что

$$\exp\{-jm\omega_q kh\} = \exp\{-j2\pi mk\} = 1$$

для целых  $m, k$ .

Идеальный квантователь выполняет операцию модуляции несущего сигнала  $u(t)$  периодическим сигналом, состоящим из идеальных импульсов  $\delta(t)$ , поэтому, если на вход идеальному квантователю поступает сигнал  $u(t)$ , то на выходе будет решетчатая функция этого сигнала.

Восстанавливающая цепь предназначена для кусочно-линейной экстраполяции между импульсами и поэтому ее можно представить как схему *выборки-хранения*, например, в виде интегратора со сбросом в момент квантования.

Определим внешнюю модель системы, содержащей, как показано на рис. 3.2, а, последовательно соединенные идеальный квантователь, фиксатор нулевого порядка и непрерывную часть. Для чего найдем преобразование Лапласа реакции системы на произвольный входной сигнал  $u(t)$ .

Пусть преобразование Лапласа решетчатой функции входного сигнала  $U^*(s)$ . Передаточную функцию  $W_f(s)$  фиксатора нулевого порядка — интегратора со сбросом



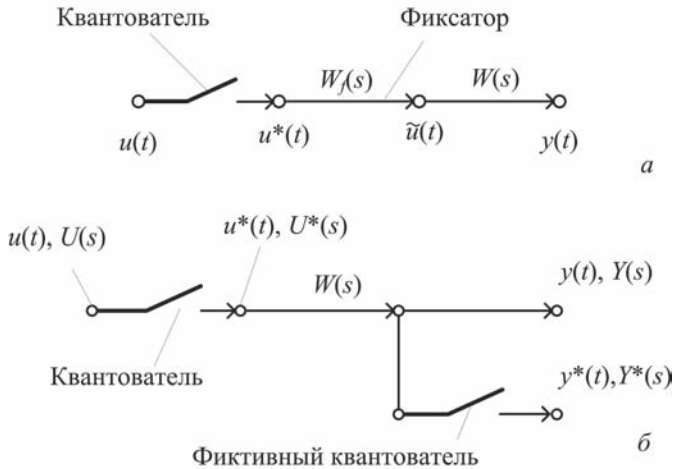


Рис. 3.2  
Внешняя модель дискретной системы (а); модель дискретной системы с фиктивным квантователем (б)

найдем как преобразование Лапласа реакции этого элемента на единичный импульс. Искомая реакция представляет собой прямоугольный импульс единичной высоты и ширины  $h$ , которую можно представить в виде разности двух единичных ступенчатых сигналов. Поэтому

$$W_f(s) = \mathcal{L}[1(t) - 1(t - h)] = \frac{1 - e^{-sh}}{s}. \quad (3.15)$$

Теперь может быть найдено преобразование Лапласа выходного сигнала системы

$$Y(s) = W_f(s)W(s)U^*(s) = \frac{1 - e^{-sh}}{s} W(s) \sum_{k \geq 0} u(kh)e^{-skh}. \quad (3.16)$$

Обозначим для дальнейшего  $G(s) = W_f(s)W(s)$ .

Данное выражение не содержит преобразования входа и поэтому не может быть использовано для определения передаточной функции системы. Однако, если на выходе системы ввести фиктивный квантователь, как показано на рис. 3.2, б, то для новой структуры передаточная функция уже определяется.

Действительно, найдем преобразование Лапласа решетчатой функции выхода системы  $Y^*(s) = [G(s)U^*(s)]^*$ .

Согласно первому свойству решетчатых функций

$$Y^*(s) = \frac{1}{h} \sum_{k \geq 0} Y(s + jk\omega_q) = \frac{1}{h} \sum_{k \geq 0} G(s + jk\omega_q)U^*(s + jk\omega_q).$$

По свойству периодичности преобразований решетчатых функций

$$U^*(s + jk\omega_q) = U^*(s),$$

имеем

$$Y^*(s) = \left[ \frac{1}{h} \sum_{k \geq 0} G(s + jk\omega_q) \right] U^*(s).$$

Выражение, стоящее в прямых скобках, согласно первому свойству решетчатых функций следует обозначить через  $G^*(s)$ . При этом получаем искомую внешнюю модель — передаточную функцию дискретной системы с непрерывным входом и выходом  $Y^*(s) = G^*(s)U^*(s)$ . Теперь, если на основании первого свойства решетчатых функции перейти в этом выражении к переменной  $z = e^{sh}$ , то получим уже известную внешнюю модель — передаточную функцию дискретной системы с дискретным входом и выходом  $Y(z) = G(z)U(z)$ .

Построим алгоритм вычисления передаточной функции, для чего вычислим все составляющие выражения

$$Y^*(s) = G^*(s)U^*(s) = \sum_{k \geq 0} y(kh)e^{-skh}.$$

Реакция линейной системы с передаточной функцией  $G(s)$  и импульсной характеристикой  $g(t)$  на дискретный входной сигнал  $u^*(t)$  находится по формуле:  $y(t) = \sum_{n \geq 0} u(nh)g(t - nh)$  или в дискретном представлении

$$y(kh) = \sum_{n \geq 0} u(nh)g((k - n)h). \quad (3.17)$$

Подставим это представление в выражение  $Y^*(s) = \sum_{k \geq 0} y(kh)e^{-skh}$ , получим

$$Y^*(s) = \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} u(nh)g((k - n)h)e^{-skh}.$$

Сделаем замену переменных  $m = k - n$

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} u(nh)g(mh)e^{-s(m+n)h} = \\ &= \sum_{m \geq 0} g(mh)e^{-smh} \sum_{n \geq 0} u(nh)e^{-snh} = \left( \sum_{m \geq 0} g(mh)e^{-smh} \right) U^*(s). \end{aligned}$$

Последнее означает, что выражение, стоящее в скобках, есть дискретная передаточная функция

$$G^*(s) = \sum_{m \geq 0} g(mh)e^{-smh}. \quad (3.18)$$

Теперь, на основании второго свойства решетчатой функции, получаем искомую внешнюю модель системы в виде передаточной функции по  $z$ -переменной:

$$G(z) = \sum_{m \geq 0} g(mh)z^{-m} = \mathcal{Z}[g(mh)]. \quad (3.19)$$

Мы получили, что  $Z$ -преобразование импульсной характеристики системы совпадает с передаточной функцией системы. Этот результат имеет прямую аналогию в теории непрерывных систем.

Кроме того, найден алгоритм вычисления передаточной функции дискретизированной системы через передаточную функцию непрерывной системы

$$G(z) = \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[G(s)]], \quad (3.20)$$

что совпадает с ранее полученным результатом.

### Примеры:

**1.** Найти преобразование Лапласа выходного сигнала фиксатора нулевого порядка, если на его вход поступает экспоненциальный сигнал.

Решетчатая функция входного сигнала равна

$$u^*(t) = e^{-\alpha t} \sum_{k \geq 0} \delta(t - kh).$$

Преобразование Лапласа этой функции имеет вид

$$U^*(s) = \frac{e^{sh}}{e^{sh} - e^{-\alpha h}}.$$

Преобразование Лапласа выходного сигнала фиксатора равно

$$W_f(s)U^*(s) = \frac{(1 - e^{-sh})e^{sh}}{s(e^{sh} - e^{-\alpha h})}.$$

**2.** Пусть непрерывная часть системы имеет передаточную функцию инерционного звена  $W(s) = \frac{k}{s+a}$ . Перед звеном и после него последовательно подключены идеальные квантователи. Найти дискретную передаточную функцию такого соединения.

Инерционное звено имеет импульсную характеристику  $g(t) = ke^{-at}$ . Выполнив подстановку  $t = mh$ , получим  $g(mh) = ke^{-amh}$ .

Теперь искомая дискретная передаточная функция принимает вид

$$W(z) = \mathcal{Z}[g(mh)] = \sum_{m \geq 0} g(mh)z^{-m} = k \sum_{m \geq 0} (e^{ah}z)^{-m}.$$

Выражение, стоящее под знаком суммы, есть общий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, поэтому сумма может быть вычислена

$$W(z) = \frac{k}{1 - (e^{ah}z)^{-1}} = \frac{kz}{z - e^{-ah}} = \frac{k}{1 - a_1 z^{-1}},$$

где  $a_1 = e^{-ah}$ .

**3.** Пусть непрерывная часть системы имеет передаточную функцию инерционного звена. Перед звеном стоит идеальный квантователь и восстановитель нулевого порядка, после звена подключен идеальный квантователь. Найти дискретную передаточную функцию такого соединения.

Используя выражение (3.11), получим

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] \right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{k}{s(s+a)} \right] \right],$$

однако, существуют таблицы  $Z$ -преобразований и преобразований Лапласа, которые позволяют находить  $\mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[W(s)]]$  сразу по виду  $W(s)$ .

В данном случае

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{k}{s(s+a)} \right] \right] = \\ &= \frac{z-1}{z} (1 - e^{ah}) \frac{kz}{a(z-1)(z - e^{ah})} = \\ &= k \frac{1 - e^{ah}}{a(z - e^{ah})} = k_1 \frac{z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}, \end{aligned}$$

где  $k_1 = \frac{k}{a}(1 - e^{ah})$ ;  $a_1 = e^{-ah}$ .

### 3.6. УПРАЖНЕНИЯ

1. Осуществить дискретизацию непрерывной системы:

- $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 3x(t) = u(t)$ ;  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 0, 2$ ;
- $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t)$ ;  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;
- $W(s) = \frac{1}{s^2 + 1, 5s + 0, 5}$ .

Шаг квантования принять равным 0,1с. Найти решение переходного уравнения.

2. Определить дискретную передаточную функцию для системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = (1 \ 0) \mathbf{x}(t).$$

Шаг квантования принять равным 0,1с. Найти импульсную переходную характеристику.

3. Найти импульсную переходную характеристику дискретной системы, которая описывается разностными уравнениями:

- $y(k+1) + 2, 4y(k) = 18u(k)$ ;
- $\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 0, 52 & 1 \\ 0 & -0, 38 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1, 5 \end{pmatrix} u(k)$ ,  
 $y(k) = (1 \ 2) \mathbf{x}(k)$ .

Найти нули и полюсы этой дискретной системы.

4. Найти дискретную передаточную функцию системы

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} u(t),$
- $y(t) = (1 \ 0) \mathbf{x}(t);$
- $W(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)},$

если на входе непрерывной части используется экстраполятор нулевого порядка.

5. Дискретная система имеет непрерывную часть, модель которой задается матрицами:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 0).$$

Выполнить дискретизацию непрерывной части с шагом 0,5с и найти дискретную передаточную функцию системы. Найти передаточную функцию непрерывной части и по ней найти передаточную функцию дискретной системы, содержащей идеальный квантователь и восстановитель нулевого порядка перед непрерывной частью и фиктивный квантователь после непрерывной части. Сравнить результаты.

6. Непрерывная часть системы содержит звено запаздывания, ее передаточная функция

$$W(s) = \frac{1}{s+a} e^{s\tau}.$$

Система квантуется с шагом: 0,1 с и 1,0 с.

Найти дискретную передаточную функцию системы.

7. Показать, что  $Z$ -преобразование выходного сигнала дважды интегрирующего звена равно

$$0,5 \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} h^2.$$

8. Построить внутреннюю модель дискретной системы, представленной своей внешней моделью в виде разностного уравнения

$$y(k+3) + 8y(k+2) + 12y(k+1) + 10y(k) = 2u(k).$$

Изобразить структурную модель системы.

9. Вычислить импульсную переходную функцию дискретной системы, у которой известно:

- $G(z) = \frac{(0,2z + 0,074)}{z^2 - 0,503z + 0,0497};$
- $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -0,6 & 1 \\ -0,32 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0,21 \\ -0,16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 0).$

Составить характеристическое уравнение и найти собственные числа этих дискретных систем.

**10.** Изучить свойства  $Z$ -преобразования. Найти  $Z$ -преобразования простейших непрерывных функций. Определить для них решетчатые функции. Найти преобразования Лапласа этих решетчатых функций. Исследовать связь между преобразованиями этих функций.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

- Примеры нелинейных систем управления
- Математические модели нелинейных систем
- Топологические методы анализа нелинейных систем
- Линейные представления нелинейной модели
- Упражнения

### 4.1. ПРИМЕРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Все реальные системы управления — нелинейные! Линейные модели систем являются идеализациями реальных систем.

Когда линейная модель довольно точно описывает динамику процессов и нет смысла учитывать малые нелинейные особенности движения, тогда говорят о *линеаризуемой нелинейной модели* системы или просто о линейной системе.

Однако существует обширный класс систем, динамика движения которых в общем случае не может быть описана линейными моделями без существенного изменения качества движения системы. Такие системы и их математические модели называют **нелинейными**.

Основная проблема анализа нелинейных систем состоит в том, что не существует универсального метода решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движение системы. Для линейных моделей такой универсальный метод есть.

Для линейных систем справедлив *принцип суперпозиции*, который позволяет исследовать эти системы парциально. Для нелинейных систем так делать нельзя. В самом деле, для линейной системы сумма двух движений является движением этой системы и всякое движение, умноженное на постоянную, вновь является движением этой системы. Поэтому, зная поведение линейной системы в малой окрестности начала координат, можно узнать поведение системы всюду в пространстве состояний. Фазовый портрет линейной системы в этом смысле *однороден* во всем пространстве состояний.

Свойства движений нелинейной системы в общем случае являются локальными и не распространяются на все пространство состояний, в этом смысле фазовый портрет нелинейной системы оказывается *неоднородным*. Поэтому устойчивость нелинейной системы зависит не только от параметров системы, но и от начальных условий и возмущений, тогда как устойчивость линейной системы зависит только от параметров системы.

Линейная система имеет одну особую точку, устойчивую или неустойчивую, нелинейная система может иметь более чем одну особую точку. Нелинейные системы могут иметь конечное, счетное или континуальное *множество особых точек*.

Если линейная система имеет периодическое движение, то для нее существует замкнутая фазовая траектория в пространстве состояния, и эта траектория не может быть изолированной, так как любое движение умноженное на постоянную, тоже является движением. Для нелинейных систем могут существовать *изолированные замкнутые траектории*, которым отвечают в общем случае негармонические колебания.

В нелинейной системе в отличие от линейной возможна скачкообразная реакция на плавное изменение внешних условий, допустимы нарушения непрерывности амплитуды и частоты, возможны *бифуркации* и другие особенности движений.

#### 4.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Основной математической моделью нелинейной системы является матричное дифференциальное уравнение

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}; t); \quad \mathbf{x}(0), \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{x}(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  — вектор состояния системы;  $t$  — параметр, например, текущее время.

Может оказаться, что вектор функция  $\mathbf{F}$  не зависит явно от времени, а зависит только от состояния, такие системы называют *автономными*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)); \quad \mathbf{x}(0). \quad (4.2)$$

*Математической моделью движения управляемой нелинейной системы* являются уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \quad \mathbf{x}(0); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{G}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \end{aligned}$$

в которых  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)^T$  — вектор управления и вектор выхода системы соответственно.

Решение нелинейного дифференциального уравнения — модели движения нелинейной системы определяет траекторию в *пространстве состояния*, называемую *фазовой траекторией*, или *фазовым движением* системы.

Фазовая траектория движения системы начинается в момент  $t = 0$  из начальной точки точки  $\mathbf{x}(0)$ , и каждому моменту времени  $t \geq 0$  отвечает точка

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T,$$

таким образом, вдоль фазовой траектории определено направление движения.

Совокупность всех фазовых траекторий образует *фазовый портрет* системы. Определенная таким образом модель носит название *внутренней модели нелинейной системы*.



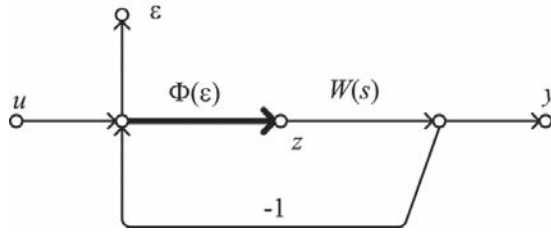


Рис. 4.1

Каноническая структура нелинейной автоматической системы

**Внешняя математическая модель** или модель типа *вход-выход* нелинейной автоматической системы представляется канонической структурой, изображенной на рис. 4.1, и содержит описание нелинейного звена  $z = \Phi(\varepsilon)$  и внешнюю модель  $W(s)$  — передаточную функцию линейной части системы.

Выходной сигнал такой системы можно найти в явном виде

$$y(t) = \int_0^t k(t - \tau) \Phi(\varepsilon(\tau)) d\tau, \quad \varepsilon(t) = u(t) - y(t),$$

где  $k(t)$  — импульсная функция линейной части нелинейной системы.

**Нелинейные элементы** в структуре автоматической системы это различные звенья с нелинейными характеристиками *вход-выход*, например: механические соединения, имеющие зазоры, упоры, люфты; реле и переключатели; усилители с насыщением; магнитные, электрогидравлические и пневматические устройства с характеристиками, обладающими гистерезисом; чувствительные элементы и датчики; нелинейные функциональные преобразователи.

Рассмотрим формальные описания идеальных нелинейных характеристик, которые используются для описания реальных характеристик нелинейных элементов систем управления:

- характеристика идеального реле, представленная на рис. 4.2, а

$$\Phi(\varepsilon; \Phi_0) = \Phi_0 \operatorname{sgn} \varepsilon; \quad \operatorname{sgn} \varepsilon = \begin{cases} -1, & \varepsilon < 0; \\ 1, & \varepsilon \geq 0; \end{cases} \quad (4.3)$$

- характеристика насыщения (рис. 4.2, б)

$$\Phi(\varepsilon; \lambda, \Phi_0) = \Phi_0 \operatorname{sat} \left( \frac{\varepsilon}{\lambda} \right); \quad \operatorname{sat} \varepsilon = \begin{cases} \varepsilon, & |\varepsilon| < 1; \\ \operatorname{sgn} \varepsilon, & |\varepsilon| \geq 1; \end{cases} \quad (4.4)$$

- характеристика нечувствительности (рис. 4.2, в)

$$\Phi(\varepsilon; \lambda, k) = k \operatorname{dez} \left( \frac{\varepsilon}{\lambda} \right); \quad \operatorname{dez} \varepsilon = \begin{cases} 0, & |\varepsilon| < 1; \\ (\varepsilon - \operatorname{sgn} \varepsilon), & |\varepsilon| \geq 1; \end{cases} \quad (4.5)$$

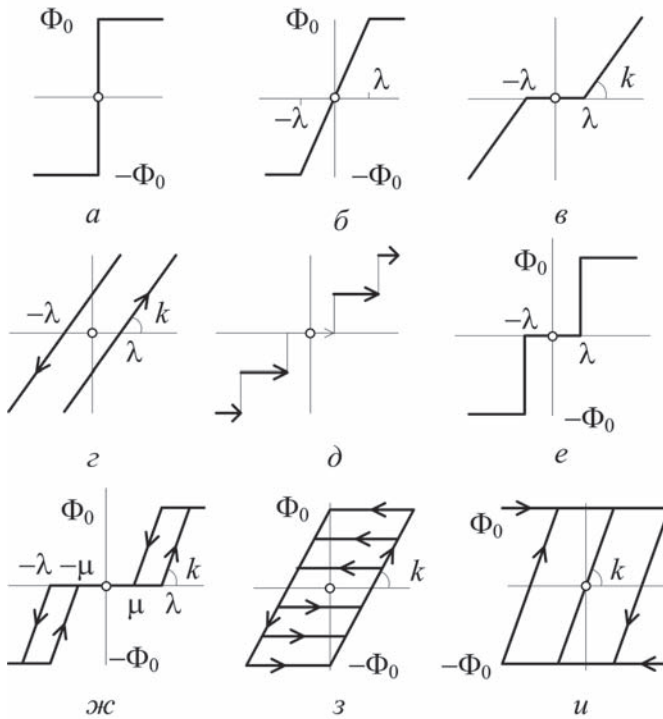


Рис. 4.2

Характеристики «вход-выход» основных нелинейных элементов: а — идеального реле; б — насыщения; в — нечувствительности; г — гистерезиса; д — аналого-цифрового преобразователя; е — идеального трехпозиционного реле; ж — насыщения с зоной нечувствительности и гистерезисом; з — «люфт»; и — «упор».

- характеристика гистерезиса (рис. 4.2, г)

$$\Phi(\varepsilon; \lambda, k) = k(\varepsilon - \lambda \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}); \quad (4.6)$$

- характеристика аналого-цифрового преобразователя (рис. 4.2, д)

$$\Phi(\varepsilon) = [\varepsilon + 0,5 \operatorname{sgn}(\varepsilon + 0,5)], \quad (4.7)$$

где  $[\varepsilon]$  — целая часть  $\varepsilon$  — ближайшее целое число, не превосходящее  $\varepsilon$ ;

- характеристика идеального трехпозиционного реле (рис. 4.2, е), содержащего зону нечувствительности.

На рис. 4.2, ж, з, и представлены и более сложные нелинейные характеристики, полученные из основных: характеристика насыщения с зоной нечувствительности и гистерезисом, характеристики типа «люфт» и «упор».

Системы управления, содержащие более чем одну нелинейность, могут быть приведены к канонической структуре с одной нелинейностью путем использования некоторых правил преобразования нелинейных характеристик:

• *последовательное соединение* двух нелинейных звеньев с характеристиками  $\Phi_1(\varepsilon), \Phi_2(\varepsilon)$  эквивалентно звену с нелинейной характеристикой

$$\Phi(\varepsilon) = \Phi_2(\Phi_1(\varepsilon));$$

• *параллельное соединение* двух нелинейных звеньев с характеристиками  $\Phi_1(\varepsilon), \Phi_2(\varepsilon)$  эквивалентно звену с нелинейной характеристикой

$$\Phi(\varepsilon) = \Phi_1(\varepsilon) + \Phi_2(\varepsilon);$$

• *встречно-параллельное соединение* двух нелинейных звеньев с характеристиками  $\Phi_1(\varepsilon), \Phi_2(\varepsilon)$ , соединенных по схеме с отрицательной обратной связью, эквивалентно звену с нелинейной характеристикой

$$\Phi(\varepsilon) = \{(\varepsilon, z) : \varepsilon = \Phi_1^{-1}(z) + \Phi_2(z)\}.$$

Встречно-параллельное соединение с положительной обратной связью позволяет, используя однозначные нелинейности, формировать неоднозначные и разрывные характеристики.

### Примеры:

**1.** Найти и изобразить интегральные кривые моделей нелинейных систем первого порядка

- $\dot{x} = -\frac{t}{x}$ ;
- $\dot{x} = 0,5(x^2 - 1)$

и фазовый портрет системы второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2^2; \\ \dot{x}_2 &= x_1.\end{aligned}$$

На рис. 4.3, *а, б* представлены семейства интегральных кривых систем первого порядка, на рис. 4.3, *в* представлен фазовый портрет нелинейной системы второго порядка.

**2.** Составить внутреннюю модель движения математического маятника.

Пусть маятник массой  $m$  раскачивается в пустоте без трения на нерастяжимом невесомом подвесе единичной длины, тогда его движение описывается нелинейным уравнением

$$ml\ddot{\varphi}(t) + mg\sin\varphi(t) = 0; \quad \varphi(0), \dot{\varphi}(0).$$

Здесь  $\varphi(t)$  — текущий угол отклонения маятника от вертикали.

Полагая  $\omega^2 = \frac{g}{l}$ , получим искомую нелинейную модель движения маятника

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega^2 \sin \varphi(t) = 0; \quad \varphi(0), \dot{\varphi}(0).$$

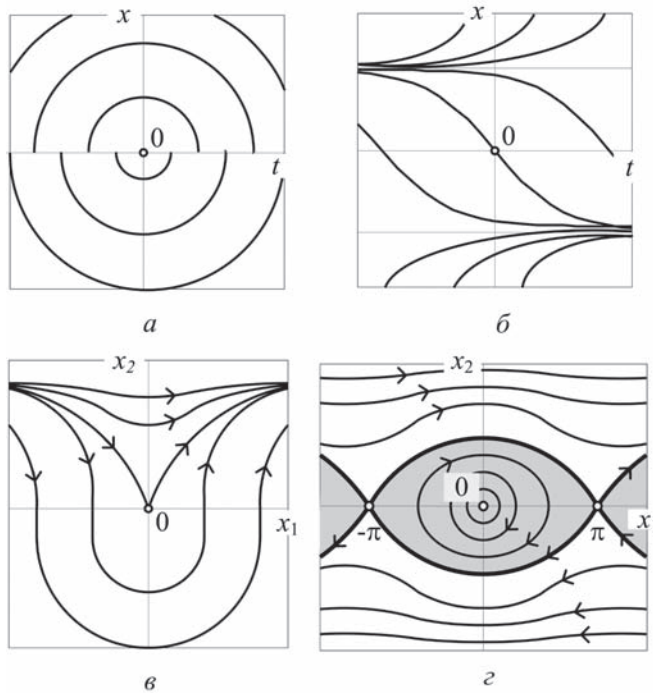


Рис. 4.3

Семейства интегральных кривых нелинейных систем первого порядка (а, б). Фазовый портрет: нелинейной системы второго порядка (в) и нелинейного математического маятника(г)

Если теперь положить, что  $x_1(t) = \varphi(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$ , то внутренняя модель движения маятника принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 \sin x_1; \quad x_1(0), x_2(0). \end{aligned}$$

Если угол отклонения достаточно мал, чтобы  $\sin \varphi \simeq \varphi$ , то модель движения маятника оказывается линейной  $\ddot{\varphi}(t) + \omega^2 \varphi(t) = 0$ ;  $\varphi(0), \dot{\varphi}(0)$ .

На рис. 4.3, г изображен фазовый портрет модели нелинейного математического маятника.

**3.** Описать внутреннюю модель движения математического маятника, который испытывает сопротивление раскачиванию.

Движение математического маятника в сопротивляющейся среде описывается нелинейным уравнением

$$\ddot{\varphi}(t) + \zeta \dot{\varphi}(t) + \omega^2 \varphi(t) = 0, \quad \zeta > 0. \quad (4.8)$$

На рис. 4.4, а, б изображены фазовые портреты такого нелинейного маятника для  $\zeta_1$  и  $\zeta_2 > \zeta_1$  соответственно.

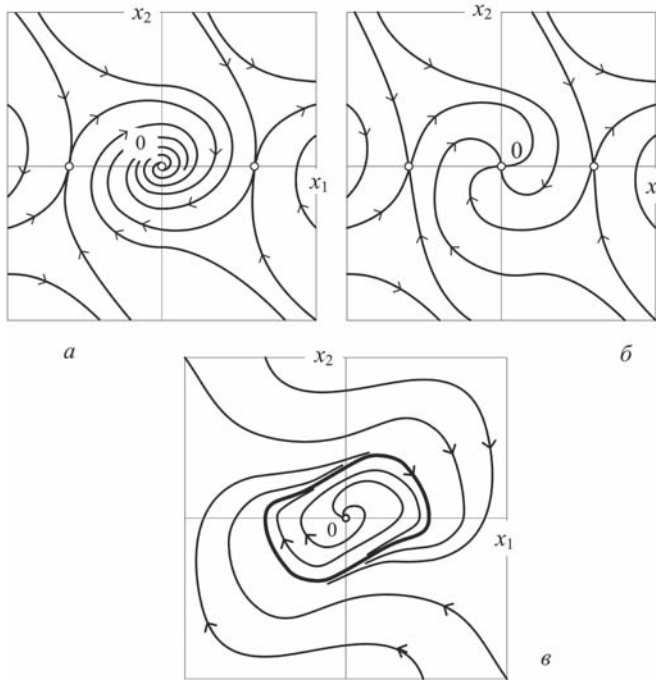


Рис. 4.4

Фазовый портрет нелинейного маятника в сопротивляющейся среде: а — при  $\zeta_1 > 0$ ; б — при  $\zeta_2 > \zeta_1$ . Фазовый портрет модели осциллятора Ван дер Поля — в.

**4.** Релаксационные колебания лампового генератора на триоде описал нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка голландский математик Балтазар Ван дер Поля. Это уравнение имеет вид

$$\ddot{\varphi}(t) + \mu(\varphi^2(t) - 1)\dot{\varphi}(t) + \varphi(t) = 0; \mu > 0. \quad (4.9)$$

Составить внутреннюю модель осциллятора Ван дер Поля при  $\mu = 1$ .

В естественных координатах состояния  $x_1(t) = \varphi(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$  матричная модель принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= (1 - x_1^2)x_2 - x_1; \quad x_1(0), x_2(0). \end{aligned}$$

Фазовый портрет этой системы изображен на рис. 4.4, в.

**5.** Описать аналитически нелинейную характеристику насыщение с зоной нечувствительности, которая представлена на рис. 4.3, ж.

$$\Phi(\varepsilon; \lambda) = \begin{cases} 0, & |\varepsilon| < \lambda; \\ \text{dez}(\varepsilon - \lambda), & |\varepsilon| \geq \lambda. \end{cases}$$

6. Построить фазовый портрет нелинейной системы управления канонической структуры (рис. 4.1), для которой

$$W(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \Phi(\varepsilon) = \operatorname{sgn} \varepsilon, \quad u(t) \equiv 0.$$

Примем координаты состояния для замкнутой системы в виде:  $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$ , тогда внутренняя модель системы принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= \Phi(\varepsilon); \\ \varepsilon &= -x_1. \end{aligned}$$

Исключив промежуточную переменную  $\varepsilon$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\operatorname{sgn} x_1. \end{aligned}$$

Поскольку функция  $\operatorname{sgn} x_1$  разрывная, разобьем фазовое пространство системы на области, где она оказывается непрерывной. Этими областями являются  $A : x_1 > 0$ ,  $B : x_1 < 0$ , их границей является прямая  $x_1 = 0$ .

Фазовый портрет движения системы складывается из фазовых кривых области  $A$  и фазовых кривых области  $B$ . Уравнения движения в области  $A$ :  $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -1$  и в области  $B$ :  $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = 1$ . Решением этих уравнений являются: в области  $A$  семейство кривых:  $x_1 = -0,5x_2^2 + C$ , в области  $B$  семейство кривых:  $x_1 = 0,5x_2^2 + C$ .

На рис. 4.5, *a* изображен фазовый портрет системы.

7. Построить фазовый портрет нелинейной системы управления канонической структуры (рис. 4.1), для которой

$$W(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \Phi(\varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon + 0,3\dot{\varepsilon}), \quad u(t) \equiv 0.$$

Внутренняя модель системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\operatorname{sgn}(x_1 + 0,3x_2). \end{aligned}$$

Областями непрерывности нелинейной характеристики являются

$$A: x_1 + 0,3x_2 > 0, \quad B: x_1 + 0,3x_2 < 0,$$

их границей оказывается прямая  $x_1 + 0,3x_2 = 0$ .

Фазовый портрет движения системы складывается из семейства фазовых кривых области  $A$ :  $x_1 = -0,5x_2^2 + C$  и семейства фазовых кривых области  $B$ :  $x_1 = 0,5x_2^2 + C$ .

На рис. 4.5, *б* изображен фазовый портрет системы.

8. Составить внутреннюю модель нелинейной системы управления канонической структуры (рис. 4.1), для которой

$$W(s) = \frac{5}{s(s+2)}, \quad z = \Phi(\varepsilon) = \operatorname{sat} \varepsilon, \quad u(t) \equiv 0.$$

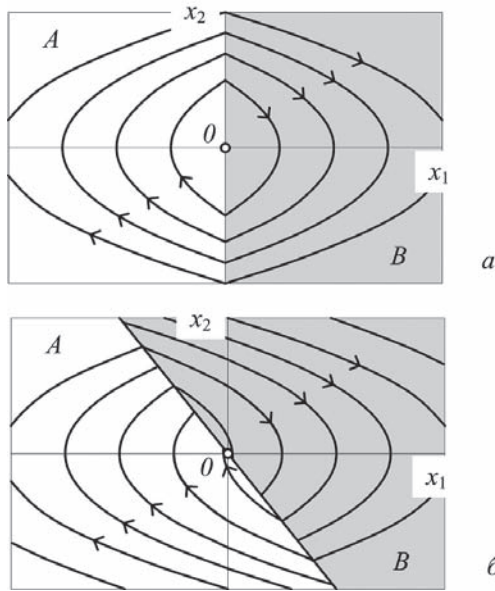


Рис. 4.5

Фазовый портрет нелинейной системы канонической структуры: а — регулятор — идеальное реле; б — характеристика регулятора — знак от ошибки и ее производной.

Воспользуемся внешней моделью линейной части системы

$$y = \frac{5}{D(D+2)} z,$$

чтобы ввести координаты состояния. Пусть  $x_1 = y$  и  $x_2 = \frac{5}{D+2} z$ , тогда

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + 5z; \\ \varepsilon &= -x_1.\end{aligned}$$

Характеристика  $z = \text{sat } \varepsilon = -\text{sat } x_1$  состоит из трех линейных частей, поэтому моделью движения является:

в области  $A = \{(x, y) : x_1 < -1\}$  :

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = 2x_2 + 5;$$

в области  $B = \{(x, y) : |x_1| \leq 1\}$  :

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = 2x_2;$$

в области  $C = \{(x, y) : x_1 > 1\}$  :

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = 2x_2 - 5.$$

### 4.3. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Топологические методы анализа являются не только качественными, но и количественными методами исследования нелинейных систем. Эти методы применимы к автономным управляемым и неуправляемым системам, при этом решение дифференциальных уравнений — модели движения системы ищется не как явная функция времени, а в виде интегральной кривой в пространстве координат состояния.

**Интегральная кривая**  $x(t)$  — это график решения системы. В каждой точке пространства состояния системы определен вектор  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , который имеет кинематический смысл вектора мгновенной скорости движения изображающей точки по интегральной кривой. Таким образом, совокупность интегральных кривых системы определяет **векторное поле скоростей** и наоборот.

Пространство состояний системы, в котором решения интерпретируются как движение по интегральным кривым называется **фазовым пространством системы**, траектории движения — **фазовые траектории**, вектор  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  — **вектор фазовой скорости**, а его компоненты — **фазовые скорости**,  $\mathbf{x}(t)$  — **изображающая**, или **фазовая точка**.

Время, рассматривается как параметр на кривой, который указывает направление движения, таким образом, фазовые кривые являются параметрически ориентированными кривыми.

Совокупность всех фазовых кривых системы образует ее **фазовый портрет**.

Любая точка фазового пространства, для которой  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  не обращается в нуль, называется **обыкновенной**, или **регулярной** точкой фазового портрета системы.

Точка  $\mathbf{x}^*$ , в которой  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$ , называется **особой**, или **сингулярной**. В особой точке вектор фазовой скорости равен нулю, поэтому особые точки есть **точки покоя**, или **точки равновесия**.

Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2); \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}, \quad (4.10)$$

которое получается из исходной модели исключением независимой переменной  $t$ , есть **уравнение фазовых траекторий** на фазовой плоскости.

В некоторых случаях удается найти аналитическое решение этого уравнения. В общем случае уравнение фазовых кривых решается приближенными графическими методами или машинными программными средствами.

Особые точки фазового портрета системы определяют систему уравнений

$$f_1(x_1, x_2) = 0, \quad f_2(x_1, x_2) = 0.$$

Основы топологических методов на фазовой плоскости для анализа нелинейных систем были заложены А. Пуанкаре (1893) и развиты для систем автоматического управления А. А. Андроновым (1928).



Основным *графическим методом* построения траекторий фазового портрета системы является **метод изоклин**.

Множество точек пространства, в которых наклон фазовых траекторий один и тот же, образуют кривые, которые называют **изоклинами**. В особой точке наклон фазовых кривых неоднозначен, поэтому изоклины пересекаются в этих точках.

Рассмотрим вновь для системы второго порядка уравнение фазовых траекторий. Положим, что

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = J(x_1, x_2) = C. \quad (4.11)$$

Уравнение  $J(x_1, x_2) = C$  полностью определяет изоклину наклона  $C$ .

После построения этой кривой на нее наносят короткие отрезки под наклоном  $\frac{dx_2}{dx_1} = C$ . Повторяя эти построения для различных значений  $C$ , получают графический образ векторного поля фазовых скоростей, по которому, начиная с исходной точки и следуя локальному направлению поля, можно изобразить фазовую траекторию.

Поведение нелинейной системы второго порядка в окрестности особых точек изучал еще в 1876 году Н. Е. Жуковский, полный анализ и классификацию особых точек по характеру локального фазового портрета для нелинейных систем второго и третьего порядка выполнил в начале прошлого века А. Пуанкаре.

Нелинейная система второго порядка в достаточно малой окрестности особой точки описывается парой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1(x_1, x_2); \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где  $g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)$  — полиномы от  $x_1, x_2$  в степенях выше первой и стремящиеся к нулю с приближением к особой точке.

В этих условиях локальное представление нелинейной системы имеет вид линейной модели второго порядка

$$\Sigma_0^{(2)}: \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = (a_{ij}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T,$$

поэтому локальный фазовый портрет системы полностью определяется двумя характеристическими числами матрицы  $\mathbf{A}$ .

Рассмотрим качественно, следуя Пуанкаре, все возможные локальные фазовые портреты системы.

- Характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2$  — действительные, одного знака и различные.

Локальный портрет в особой точке назван **узлом**, причем *устойчивым узлом* (рис. 4.6, а), если  $\lambda_1, \lambda_2$  — отрицательные и *неустойчивым узлом* (рис. 4.6, б), если  $\lambda_1, \lambda_2$  — положительные.

- Характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2$  — действительные, одного знака, но равные.

Локальный портрет в особой точке назван **вырожденным узлом** (рис. 4.6, в, г).

- Характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2$  — действительные, разных знаков.

Локальный портрет в особой точке назван **седлом** (рис. 4.6, д).

- Характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2$  — комплексные.

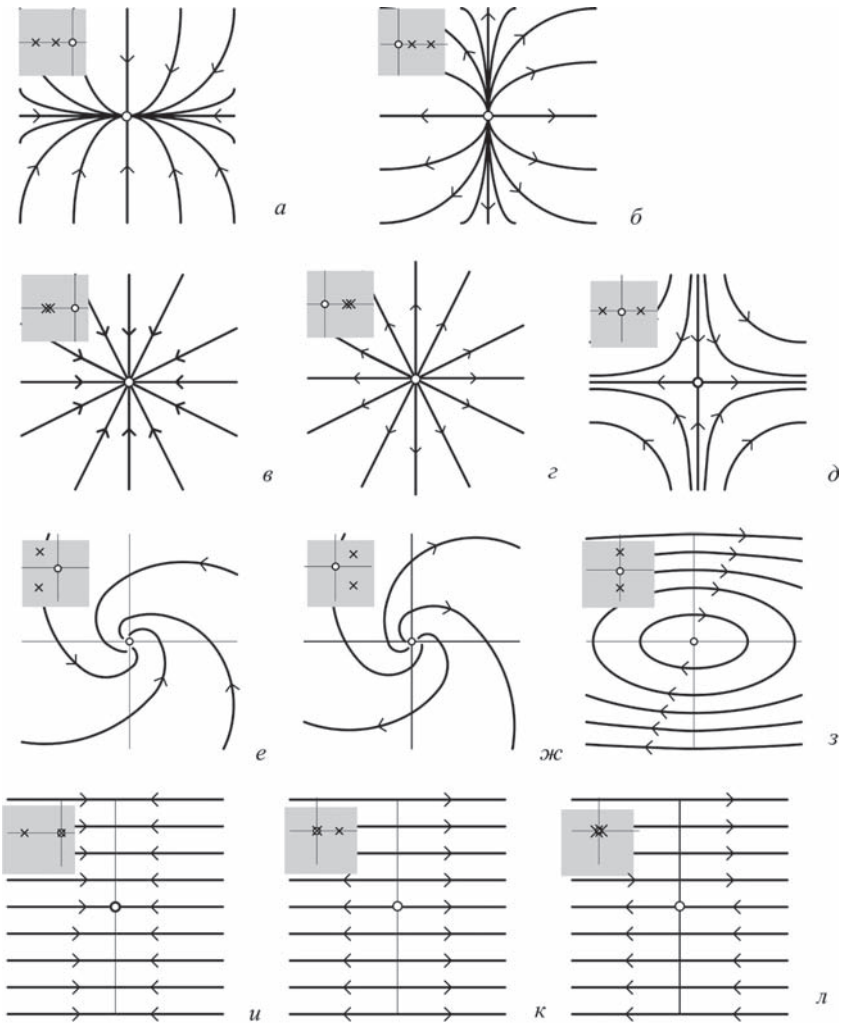


Рис. 4.6

Локальные фазовые портреты нелинейной системы, в которой характеристические числа: а — действительные, отрицательные и различные; б — действительные, положительные и различные; в — действительные, отрицательные, равные; г — действительные, положительные, равные; д — действительные, разных знаков; е — комплексные левые; ж — комплексные правые; з — чисто мнимые; и — одно нулевое, другое отрицательное; к — одно нулевое, другое положительное; л — оба нулевые.

Локальный портрет в особой точке назван **фокусом** (рис. 4.6, *е, ж*), устойчивым, если корни — левые и неустойчивым, если корни — правые. Локальный портрет в особой точке назван **центром** (рис. 4.6, *з*), когда характеристические числа — чисто мнимые.

- Среди характеристических чисел есть равные нулю.

Локальный портрет в особой точке — параллельные прямые. Если лишь одно число равно нулю (рис. 4.6, *и, к*), то множество особых точек — прямая  $x_1 = 0$ .

Если оба характеристических числа равны нулю (рис. 4.6, *л*), то множество особых точек либо прямая  $x_2 = 0$ , либо любая точка фазовой плоскости.

Ориентацию на фазовых траекториях определяет параметр, которым является *время*. Поэтому направление движения по фазовой кривой определяется по одному из уравнений модели. Например, если модель системы содержит уравнение  $\dot{x}_1 = x_2$ , то ориентация фазовых кривых совпадает с направлением часовой стрелки.

Время движения по фазовой траектории  $x_2 = \varphi(x_1)$  от точки  $A = (x_1^{\circ}, x_2^{\circ})$  до точки  $B = (x_1^*, x_2^*)$  может быть найдено интегрированием, например, первого уравнения модели системы

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2),$$

в результате получим

$$t_{AB} = \int_{x_1^{\circ}}^{x_1^*} \frac{1}{f_1(x_1, \varphi(x_1))} dx_1. \quad (4.13)$$

Замкнутая фазовая траектория соответствует периодическому движению системы. Замкнутая изолированная траектория фазового портрета называется **предельным циклом**.

Изолированность замкнутой траектории означает, что существует такая ее окрестность, что в ней нет других замкнутых траекторий. Например, все траектории фазового портрета гармонического осциллятора, хотя и замкнутые, но не изолированные, поскольку в любой сколь угодно малой ее окрестности каждой замкнутой траектории есть как минимум одна замкнутая траектория.

### Примеры:

1. Составить фазовый портрет линейной модели маятника.

По линейной модели движения математического маятника

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1 \end{aligned}$$

следует составить уравнение фазовых кривых:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\omega^2 x_1}{x_2}.$$

Представим это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными в виде

$$x_2 dx_2 + \omega^2 x_1 dx_1 = 0.$$

После интегрирования имеем решение  $x_2^2 + \omega^2 x_1^2 = C$ .

Таким образом, фазовый портрет линейной модели математического маятника на плоскости  $\omega x_1, x_2$  представляется совокупностью концентрических окружностей, а в естественных координатах  $x_1, x_2$  — семейством эллипсов. У этой системы одна точка покоя — начало координат.

2. Построения фазовый портрет движения нелинейной модели математического маятника

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega^2 \sin \varphi(t) = 0; \quad \varphi_0, \dot{\varphi}_0.$$

Проинтегрируем по  $t$  обе части этого уравнения, предварительно умножив его на  $\dot{\varphi}(t)$ . Получим сначала

$$\int \dot{\varphi}(t) \ddot{\varphi}(t) dt + \omega^2 \int \sin \varphi(t) \dot{\varphi}(t) dt = C,$$

а затем

$$\int \dot{\varphi} d\varphi + \omega^2 \int \sin \varphi d\varphi = C.$$

Откуда находим искомые уравнения кривых фазового портрета

$$\dot{\varphi}^2 = 2\omega^2 \cos \varphi + C.$$

В координатах состояния  $x_1 = \varphi, x_2 = \dot{\varphi}$  это уравнение принимает вид

$$x_2^2 - 2\omega^2 \cos x_1 = C.$$

На рис. 4.3,  $g$  представлен фазовый портрет нелинейного математического маятника. В малой окрестности точек  $2k\pi, k$  — целое число, этот портрет близок к портрету линейного маятника. Портрет содержит замкнутые и незамкнутые кривые, которые соответствуют периодическим и непериодическим движениям маятника.

Продолжим изучение фазового портрета нелинейного маятника, пусть начальные условия движения приняты в точке

$$x_1(0) = \varphi_0 = \varphi_{max}, \quad x_2(0) = \dot{\varphi}_0 = 0,$$

тогда  $C = -2\omega^2 \cos \varphi_0$ , поэтому уравнение замкнутых фазовых кривых имеет вид

$$x_2^2 = 2\omega^2 (\cos x_1 - \cos \varphi_0).$$

Заметим, что кривая, которая отделяет семейство колебательных движений от семейства вращательных, определяется при  $\varphi_0 = \pm\pi$  называется *сепаратрисой* и описывается уравнением

$$x_2 = \pm 2\omega \cos \frac{x_1}{2}.$$

Особые точки этой системы:  $x_1^* = k\pi, x_2^* = 0$ , где  $k$  — целое число.

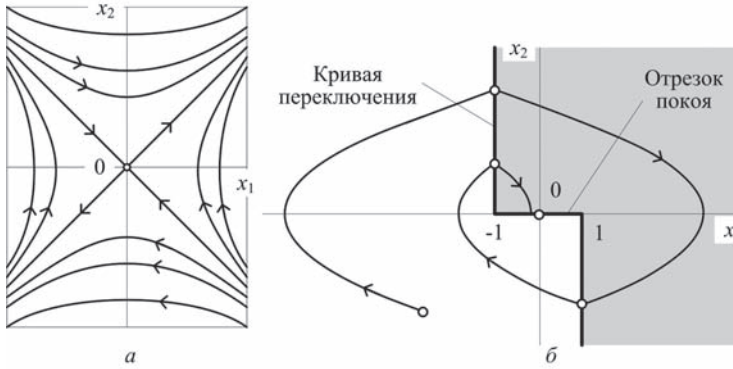


Рис. 4.7

Фазовый портрет системы с одной особой точкой (а). Фазовое движение системы, регулятор которой имеет симметричную характеристику двухпозиционного реле с гистерезисом (б).

**3.** Построить фазовый портрет системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= x_1. \end{aligned}$$

Уравнения фазовых кривых  $x_2 dx_2 - x_1 dx_1 = 0$ ,  $x_2 \neq 0$  имеют решение  $x_1^2 - x_2^2 = C$ . Это семейство гипербол, представленное на рис. 4.7, а, имеет одну особую точку — начало координат  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 0$ .

**4.** Составить фазовый портрет нелинейной системы управления, линейная часть которой имеет передаточную функцию  $W(s) = \frac{1}{s^2}$ , а нелинейный элемент имеет симметричную характеристику двухпозиционного реле с гистерезисом

$$\Phi(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & (\varepsilon > 1) \vee (\dot{\varepsilon} < 0, \quad |\varepsilon| < 1); \\ -1, & (\varepsilon < -1) \vee (\dot{\varepsilon} > 0, \quad |\varepsilon| < 1). \end{cases}$$

Модель этой системы в координатах состояния  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$  принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= \Phi(\varepsilon); \\ \varepsilon &= u - y. \end{aligned}$$

Фазовый портрет системы складывается из двух полупортретов:  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = \pm 1$ , которые склеиваются по линии переключения. Пусть  $u(t) \equiv 0$ , тогда  $\varepsilon = -x_1$  и поэтому линия переключения определяется уравнением  $x_1 = -\text{sgn } x_2$ .

Оба полупортрета представляют собой семейство парабол

$$x_1 = -0,5x_2^2 + C,$$

поскольку уравнения фазовых кривых этой системы имеет вид

$$x_2 dx_2 + dx_1 = 0.$$

На рис. 4.7, б изображена одна из фазовых траекторий портрета системы. Система имеет непрерывное множество особых точек

$$\{x_1^* \in [-1, 1], x_2^* = 0\}.$$

**5.** Найти особые точки нелинейной системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sin x_1; \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_2,\end{aligned}$$

портрет которой изображен на рис. 4.8. Особые точки определяются из уравнений  $\sin x_1 = 0$ ,  $\sin x_2 = 0$ .

Совокупность особых точек этой системы представляется множеством  $x_1^* = k\pi$ ,  $x_2^* = m\pi$ ;  $k, m$  — целые числа.

**6.** Найти семейство изоклин для нелинейной модели, уравнение изоклин которой имеет вид

$$\frac{dx_2}{dx_1} = x_1^2 + x_2^2 = C.$$

Семейство изоклин наклона  $C$  представляется совокупностью концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом  $\sqrt{C}$ .

На рис. 4.8, б приведены некоторые изолинии, фрагмент поля направлений и реконструкция фазовых траекторий этой системы.

**7.** Система

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 - 1; \\ \dot{x}_2 &= -3x_1 - 4x_2 + 3\end{aligned}$$

имеет точку покоя  $x^* = (1 \ 0)^T$ .

Уравнения изоклин

$$\frac{-3x_1 - 4x_2 + 3}{x_1 + 2x_2 - 1} = C$$

после преобразования принимает вид

$$x_2 = \frac{1 - x_1}{2C + 4}(3 + C).$$

Семейством изоклин является пучок прямых, проходящих через особую точку. На рис. 4.9, а представлены изоклины и несколько фазовых траекторий этой системы.

**8.** На рис. 4.4, в изображен фазовый портрет нелинейного осциллятора. Исследование этой системы (4.9) в общем случае и этот портрет был получен Ван дер Полем (1926) методом изоклин. Найти и изобразить семейство изоклин этого генератора.

Уравнение изоклин для этой системы имеет вид

$$(1 - x_1^2)x^2 - x_1 = Cx_2.$$

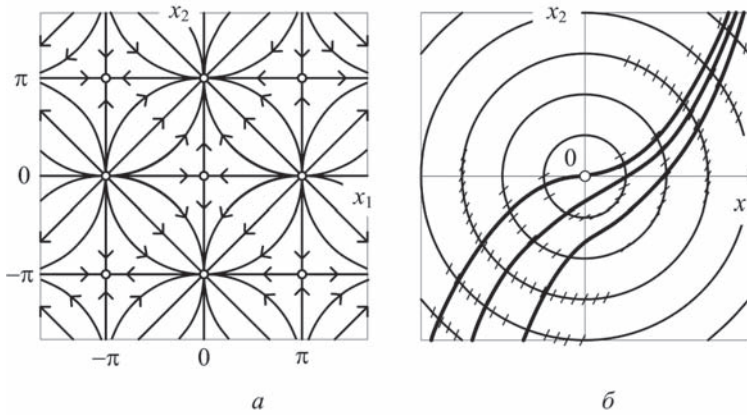


Рис. 4.8

Фазовый портрет системы со счетным числом особых точек (а). Изолинии, фрагмент поля направлений и реконструкция фазовых траекторий систем (б)

На рис. 4.9, б приведены изоклины различных наклонов нелинейного осциллятора Ван дер Поля в окрестности особой точки.

### 9. Фазовый портрет гармонического осциллятора

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1\end{aligned}$$

состоит из концентрических эллипсов  $\omega^2 x_1^2 + x_2^2 = r^2$ .

Время движения по эллипсу с полуосями  $r/\omega$ ,  $r$  равно

$$4 \int_0^{r/\omega} \frac{dx_1}{\sqrt{r^2 - \omega^2 x_1^2}} = 4 \arcsin \left( \frac{\omega x_1}{r} \right) \Big|_0^{r/\omega} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Известный результат!

### 10. Фазовый портрет системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2); \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

имеет предельный цикл — окружность  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ . Действительно, модель системы в полярных координатах:  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$  принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2); \\ \dot{\varphi} &= -1.\end{aligned}$$

Ясно, что  $r(t) \equiv 1$ ,  $\dot{\varphi}(t) = -1$  является решением этой системы. Это решение — окружность, по которой изображающая точка движется с постоянной угловой скоростью.

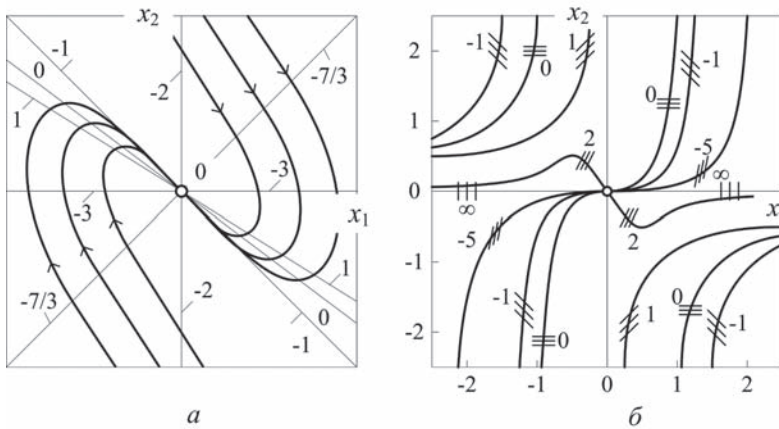


Рис. 4.9

Изоклины и фазовые траектории нелинейной системы (а). Изоклины осциллятора Ван дер Поля в окрестности особой точки (б).

Если начальная точка внутренняя, то для нее величина  $\dot{r} > 0$ , а это значит, что все внутренние траектории с ростом времени удаляются от особой точки, приближаясь бесконечно близко к окружности.

Если же начальные точки лежат вне круга  $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ , то величина  $\dot{r}(t)$  оказывается отрицательной, значит со временем полярный радиус каждой кривой будет уменьшаться. Внешние траектории с ростом времени, как изображено на рис. 4.10, наматываются на окружность  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , которая, таким образом, оказывается изолированной, а значит *предельным циклом*.

**11.** Фазовый портрет осциллятора Ван дер Поля, представленный на рис. 4.4, в, содержит предельный цикл, значит описываемый генератор является колебательной системой.

#### 4.4. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

Линеаризация как представление модели нелинейной системы в линейном виде является простейшим методом, который позволяет использовать аналитический аппарат теории линейных систем для анализа нелинейных систем. Известны три основных метода линеаризации: *касательная*, *гармоническая* и *стохастическая*.

• **Касательная линеаризация** осуществляется в предположении, что движение нелинейной системы происходит в достаточно малой окрестности *рабочей точки* пространства состояния системы.

Параметры линеаризованной системы находят из разложения нелинейной модели в ряд Тейлора по степеням малых отклонений от рабочей точки или методом *наименьших квадратов Гаусса*. Метод касательной линеаризации изложен в 2.3.



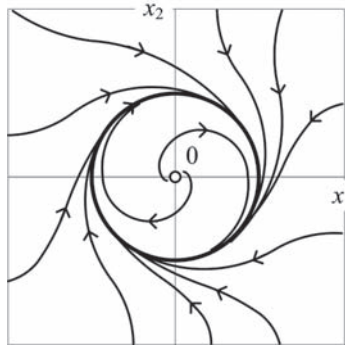


Рис. 4.10

Фазовый портрет системы с предельным циклом.

• **Гармоническая линейаризация** осуществляется не во временной области, а в частотной, для систем, работающих с гармоническими сигналами.

Суть метода состоит в том, что при наличии фильтрующих свойств у линейных элементов системы, в установившейся реакции на гармонический входной сигнал учитывается лишь основная гармоническая составляющая.

• **Стохастическая линейаризация** осуществляется во временной области для систем, испытывающих случайные возмущения. Метод состоит в аппроксимации нелинейной модели статистически эквивалентным линейным оператором.

#### 4.4.1. Гармоническая линейаризация

Метод гармонической линейаризации (Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, 1934), или *метод описывающих функций* основывается на трех допущениях:

- выходной сигнал системы является периодическим и его частота совпадает с частотой входного гармонического сигнала;
- структура системы канонического вида (рис. 4.1), содержит один нелинейный элемент, характеристика которого стационарна и кососимметрична;
- линейная часть системы обладает свойствами низкочастотного фильтра, что позволяет подавлять высшие гармоники в выходном сигнале.

Пусть входной сигнал нелинейного элемента системы является гармоническим  $\varepsilon(t) = A \sin \omega t$ , выходной сигнал нелинейного элемента с характеристикой  $z = \Phi(\varepsilon)$  представляется сигналом  $z(t) = \Phi(A \sin \omega t)$ . Разложим этот сигнал в ряд Фурье:

$$z(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cos k\omega t + C_k \sin k\omega t).$$

В силу допущений метода  $B_0 = 0$ ,  $B_k = C_k = 0$ ,  $k > 1$  поэтому  $z(t) \simeq B_1 \cos \omega t + C_1 \sin \omega t$ , где

$$\begin{aligned}
 B_1 &= (\Phi(A \sin \omega t), \cos \omega t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(A \sin \omega t) \cos \omega t \, d\omega t; \\
 C_1 &= (\Phi(A \sin \omega t), \sin \omega t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(A \sin \omega t) \sin \omega t \, d\omega t.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Обозначив  $D^2 = B_1^2 + C_1^2$ ;  $B_1 = D \sin \varphi$ ,  $C_1 = D \cos \varphi$ , получим

$$z(t) \simeq D \sin(t + \varphi), \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{B_1}{C_1}.$$

Выходной сигнал нелинейного элемента оказывается почти гармоническим. Нелинейный элемент ведет себя почти как линейное звено.

Найдем передаточную функцию этого псевдолинейного звена, для чего воспользуемся комплексной формой записи входного и выходного гармонических сигналов:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^*(t) &= \operatorname{Im} A e^{j\omega t}, \\
 z^*(t) &= \operatorname{Im} D e^{j(\omega t + \varphi)}, \\
 N(A; \omega) &= \frac{z^*(t)}{\varepsilon^*(t)} = \frac{D}{A} e^{j\varphi}.
 \end{aligned}$$

Выражение  $N(A; \omega)$  называют **эквивалентной передаточной функцией**, или **описывающей функцией**, или **комплексным передаточным коэффициентом** нелинейного элемента системы.

$$N(A; \omega) = \frac{D}{A} \cos \varphi + j \frac{D}{A} \sin \varphi = k_1(A; \omega) + j k_2(A; \omega), \tag{4.15}$$

где  $k_1(A; \omega) = \frac{C_1}{A}$ ;  $k_2(A; \omega) = \frac{B_1}{A}$  — действительный и мнимый коэффициенты гармонической линейаризации.

Описывающая функция  $N(A; \omega)$  является комплексной функцией амплитуды гармонического входного воздействия, при этом частота входного сигнала оказывается параметром.

Описывающая функция гармонически линейаризованного нелинейного элемента порождает годограф

$$\{N(A): A \in [0, \infty), \omega = \text{const}\},$$

который представляет собой эквивалентную **амплитудно-фазовую характеристику** нелинейного элемента.

На рис. 4.11 приведены годографы двух нелинейных звеньев.

Изменяя частоту входного гармонического сигнала как параметр, можно получить семейство годографов

$$\{N(A): A \in [0, \infty), \omega = \text{var}\}.$$

Коэффициенты гармонической линейаризации находят из выражений:

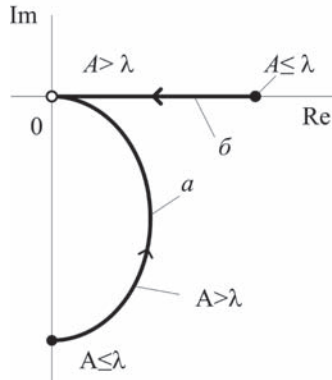


Рис. 4.11

Годограф описывающей функции: а — идеального двухпозиционного реле с прямоугольным гистерезисом; б — идеального трехпозиционного реле.

$$k_1(A) = \frac{2}{A\pi} \int_0^{\pi} \Phi(A \sin \omega t) \sin \omega t \, d\omega t;$$

$$k_2(A) = \frac{2}{A\pi} \int_0^{\pi} \Phi(A \sin \omega t) \cos \omega t \, d\omega t. \quad (4.16)$$

Заметим, что для однозначных характеристик нелинейных звеньев

$$N(A) = k_1(A), \quad k_2(A) = 0.$$

В<sup>1</sup> приведены формулы для вычисления коэффициентов гармонической линеаризации большого числа одно и двухзначных типовых характеристик нелинейных звеньев.

#### 4.4.2. Стохастическая линеаризация

Пусть  $\varepsilon(t)$  — стационарный эргодический случайный процесс с нулевым средним, тогда и выходной сигнал стационарной нечетной нелинейности  $\Phi(\varepsilon)$  оказывается стационарным эргодическим случайным процессом. В этих условиях определим линейную модель нелинейного звена из условия наилучшего среднеквадратичного приближения

$$\hat{z} = K_s \varepsilon(t);$$

$$\mathbb{M} [(z(t) - \hat{z}(t))^2] \rightarrow \min_{K_s}.$$

Назовем  $K_s$  **коэффициентом стохастической линеаризации**. Выражение для коэффициента стохастической линеаризации найдем, применив необходимые условия экстремума к функции

$$\mathbb{M} [(z(t) - K_s \varepsilon(t))^2],$$

<sup>1</sup> Топчев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. — М.: Машиностроение, 1989.

получим соотношение

$$\mathbb{M}[(z(t) - K_s \varepsilon(t))\varepsilon(t)] = 0.$$

Из этого соотношения находим, что

$$K_s = \frac{\mathbb{M}[z(t)\varepsilon(t)]}{\mathbb{M}[z(t)z(t)]} = \frac{R_{z\varepsilon}(0)}{R_\varepsilon(0)},$$

где  $R_{z\varepsilon}(0)$ ,  $R_\varepsilon(0)$  — значения в нуле взаимной и автокорреляционной функций.

Пусть входной случайный процесс — шум с плотностью  $f(\varepsilon)$ , нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ , тогда коэффициент стохастической линейаризации можно найти из выражения:

$$K_s(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\varepsilon)\varepsilon f(\varepsilon)d\varepsilon. \quad (4.17)$$

В силу эргодичности случайных процессов входа и выхода коэффициент стохастической линейаризации может быть найден и по выражению

$$K_s(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \Phi(\varepsilon)\varepsilon f(\varepsilon)d\varepsilon, \quad T \rightarrow \infty. \quad (4.18)$$

Если входной случайный процесс является *нормальным гауссовым процессом* и характеристика нелинейности непрерывно дифференцируемая, то выражение для коэффициента стохастической линейаризации оказывается более простым.

В самом деле, подставив в выражение для  $K_s(\sigma)$  функцию одномерной нормальной плотности распределения вероятностей

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right),$$

получим

$$K_s(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\varepsilon)\varepsilon \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right) d\varepsilon. \quad (4.19)$$

Теперь, выполнив преобразования под интегралом и учитывая нечетность характеристики нелинейности, получим

$$K_s(\sigma) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} \Phi(\varepsilon)d \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right).$$

После интегрирования по частям окончательно получим

$$K_s(\sigma) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right) d\varepsilon. \quad (4.20)$$

**Примеры:**

1. Найти описывающую функцию нелинейного звена с характеристикой насыщения

$$\Phi(\varepsilon) = \Phi_0 \text{sat} \left( \frac{\varepsilon}{\lambda} \right).$$

Пусть входной гармонический сигнал имеет амплитуду большую чем  $\lambda$ , тогда выходной сигнал нелинейного звена, как видно из рис. 4.12, а, будет иметь форму усеченной синусоиды:

$$z = \begin{cases} \Phi_0 \frac{A}{\lambda} \sin \omega t, & (0 \leq \omega t \leq \alpha) \vee (\pi - \alpha \leq \omega t \leq \pi); \\ \Phi_0, & \alpha \leq \omega t \leq \pi - \alpha, \end{cases}$$

где значение момента отсечки  $\alpha = \arcsin \frac{\lambda}{A}$ .

Коэффициент гармонической линейризации  $k_1(A)$ , когда  $A \geq \lambda$  равен:

$$\begin{aligned} k_1(A) &= \frac{2\Phi_0}{A\pi} \left( \frac{A}{\lambda} \int_0^\alpha \sin^2 \omega t d\omega t + \int_\alpha^{\pi-\alpha} \sin \omega t d\omega t + \frac{A}{\lambda} \int_{\pi-\alpha}^\pi \sin^2 \omega t d\omega t \right) = \\ &= \frac{2\Phi_0}{\pi\lambda} \left( \arcsin \frac{\lambda}{A} + \frac{\lambda}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{A} \right)^2} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, описывающая функция нелинейного звена принимает вид

$$N(A) = \begin{cases} \frac{\Phi_0}{\pi\lambda} (2\alpha - \sin 2\alpha), & A \geq \lambda; \\ \frac{\Phi_0}{\lambda}, & A < \lambda. \end{cases}$$

На рис. 4.12,б изображен график описывающей функции звена ограничения.

Заметим, что, если  $\lambda \rightarrow 0$ , то предельное выражение описывающей функции звена ограничения представляет описывающую функцию идеального релейного элемента  $N(A) = 4 \frac{\Phi_0}{\pi A}$ .

2. Осуществить гармоническую линейризацию звена с характеристикой  $\Phi(\varepsilon) = a\varepsilon + b\varepsilon^3$ .

Воспользуемся прямой идеей метода. Пусть  $\varepsilon = A \sin \omega t$ , тогда

$$\begin{aligned} z(\omega t) &= \Phi(\varepsilon(\omega t)) = aA \sin \omega t + bA^3 \sin^3 \omega t = \\ &= aA \sin \omega t + 0,25bA^3 (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t). \end{aligned}$$

Если из этого разложения выделить первую гармонику, то получим выражение описывающей функции  $N(A) = a + 0,75bA^2$ .

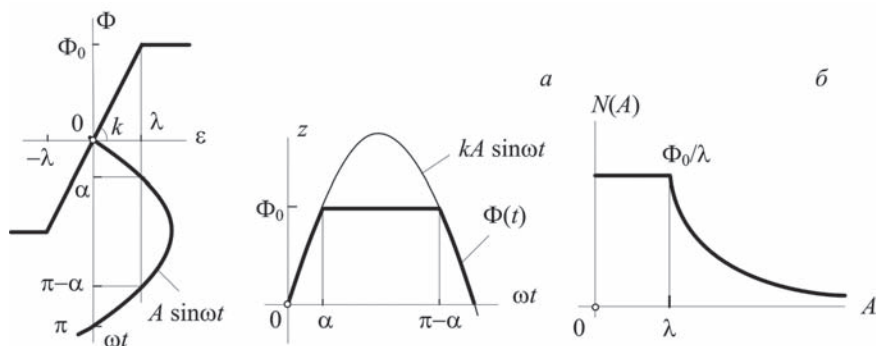


Рис. 4.12

Реакция звена насыщения на входной гармонический сигнал (а), график описывающей функции звена ограничения (б)

3. Найти описывающую функцию для звена с характеристикой трехпозиционного реле с зоной нечувствительности

$$\Phi(\varepsilon) = \begin{cases} \Phi_0 \operatorname{sgn} \varepsilon, & |\varepsilon| \geq \lambda; \\ 0, & |\varepsilon| < \lambda. \end{cases}$$

Пусть входной сигнал  $\varepsilon = A \sin \omega t$ , тогда выходной сигнал звена на полупериоде  $[0, \pi]$  определяет выражение

$$z(\varepsilon) = \begin{cases} \Phi_0, & \alpha \leq \varepsilon < \beta; \\ 0, & (0 \leq \varepsilon < \alpha) \vee (\beta \leq \varepsilon < \pi). \end{cases}$$

Найдем первый коэффициент гармонической линейризации

$$k_1(A) = \frac{2}{\pi A} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi_0 \sin \omega t \, d\omega t = 4 \frac{\Phi_0}{\pi A} \cos \alpha.$$

Величина  $\alpha = \arcsin \frac{\lambda}{A}$ ,  $\beta = \pi - \alpha$ , поэтому

$$N(A) = k_1(A) = \frac{4\Phi_0}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{A}\right)^2}.$$

4. Выполнить стохастическую линейризацию для нелинейного элемента с характеристикой идеального реле с нечувствительностью

$$\Phi(\varepsilon) = \begin{cases} \Phi_0 \operatorname{sgn} \varepsilon, & |\varepsilon| > \lambda; \\ 0, & |\varepsilon| \leq \lambda. \end{cases}$$

Нелинейный элемент испытывает воздействие гауссова шума. Значение коэффициента стохастической линеаризации определим из выражения

$$K_s(\sigma) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^3}} \int_{\lambda}^{\infty} \Phi_0 \varepsilon \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right) d\varepsilon,$$

которое после необходимых преобразований принимает вид

$$K_s(\sigma) = \frac{2\Phi_0}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(\frac{-\lambda^2}{2\sigma^2}\right).$$

Заметим, что, если в этом соотношении положить  $\lambda = 0$ , то получим выражение для коэффициента стохастической линеаризации идеального реле  $K_s(\varepsilon) = \frac{2\Phi_0}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ .

**5.** Выполнить стохастическую линеаризацию для нелинейного элемента с характеристикой нечувствительности  $\Phi(\varepsilon; \lambda, k) = k \operatorname{dez}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)$ .

Нелинейный элемент испытывает воздействие гауссова шума. Характеристика нелинейности непрерывна и на полуоси  $\varepsilon \geq \lambda$  непрерывно дифференцируема, при этом

$$\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{k}{\lambda}.$$

Поэтому, согласно (4.20), значение коэффициента стохастической линеаризации определяется выражением

$$K_s(\sigma) = \frac{2k}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{\lambda}^{\infty} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right) d\varepsilon,$$

которое с точностью до множителя совпадает с табулированным интегралом вероятностей и значит может быть вычислен.

#### 4.5. УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Построить семейство интегральных кривых для системы:

- $\dot{x} = 4xt$ ;
- $\dot{x} = -\frac{2t}{x}$ ;
- $\dot{x} = \sin x$ .

Найти аналитически фазовый портрет для системы:

- $\dot{x}_1 = x_2$ ,
- $\dot{x}_2 = -\frac{x_2^2}{x_1}$ ;
- $\dot{x}_1 = -x_1$ ,
- $\dot{x}_2 = -2x_2$ .

Найти точки покоя системы:

- $\dot{x} = x^3 - x;$
- $\dot{x}_1 = -x_2,$   
 $\dot{x}_2 = -\sin x_1;$
- $\dot{x}_1 = x_1 - x_2,$   
 $\dot{x}_2 = x_2(x_1 - x_2^2).$

**2.** Выполнить необходимые преобразования и убедиться в том, что:

- нелинейный элемент с характеристикой трехпозиционного реле может быть получен последовательным соединением звена с характеристикой нечувствительности и идеального реле;
- звено с характеристикой двухпозиционного реле с прямоугольным гистерезисом шириной  $2\lambda$  может быть получено путем охвата идеального реле положительной обратной связью величиной  $\lambda$ ;
- нелинейный элемент с характеристикой «люфт» может быть получен путем охвата отрицательной обратной связью звена с характеристикой нечувствительности и последовательно соединенного с ним интегрирующего звена.

**3.** Методом изоклин построить фазовый портрет нелинейной системы:

- $\dot{x}_1 = x_1 + x_2,$   
 $\dot{x}_2 = x_1^2;$
- $\dot{x}_1 = x_1(1 - x_2),$   
 $\dot{x}_2 = -x_2(1 - x_1);$
- $\dot{x}_1 = x_2^2,$   
 $\dot{x}_2 = x_2(2x_1 - x_2).$

**4.** Построить фазовый портрет нелинейной системы канонической структуры (рис. 4.1), для которой:

- $W(s) = \frac{1}{s^2},$   
 $\Phi(\varepsilon) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \varepsilon, & |\varepsilon| \geq 1; \\ 0, & |\varepsilon| < 1; \end{cases}$
- $W(s) = \frac{1}{s^2 + 1},$   
 $\Phi(\varepsilon) = \operatorname{sgn} \varepsilon;$
- $W(s) = \frac{1}{s(s + 1)},$   
 $\Phi(\varepsilon) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \varepsilon, & |\varepsilon| \geq 2; \\ 0, & |\varepsilon| < 2. \end{cases}$

**5.** Система управления канонической структуры имеет линейную часть с передаточной функцией



$$W(s) = \frac{1}{s^2}$$

и нелинейный элемент с характеристикой  $\Phi(\varepsilon) = \operatorname{sgn} \varepsilon$ .

Построить фазовый портрет системы. Для устранения возникающих незатухающих колебаний предлагается ввести в структуру системы линейный регулятор с передаточной функцией форсирующего звена. Построить фазовый портрет такой системы.

**6.** Показать, используя полярные координаты, что фазовый портрет системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)\end{aligned}$$

имеет предельные циклы.

**7.** Найти линейное представление в окрестности особой точки и построить локальный фазовый портрет этого представления для нелинейной системы:

- $\dot{x}_1 = \sin x_1,$   
 $\dot{x}_2 = -\sin x_2;$
- $\dot{x}_1 = x_1(1 - x_2),$   
 $\dot{x}_2 = -x_2(1 - x_1);$
- $\dot{x}_1 = x_2,$   
 $\dot{x}_2 = -x_1 + x_1^3.$

**8.** Найти описывающую функцию для нелинейного звена с характеристикой:

- двухпозиционного реле с прямоугольным гистерезисом;
- линейного гистерезиса.

Построить годографы комплексных коэффициентов гармонической линеаризации.

**9.** Найти описывающую функцию для нелинейного элемента, внешняя характеристика которого описывается дифференциальным уравнением

$$\Phi(\varepsilon) = \ddot{\varepsilon} - (1 - \varepsilon^2)\dot{\varepsilon} + \varepsilon.$$

**10.** Найти коэффициент стохастической линеаризации для нелинейного элемента

$$\Phi(\varepsilon) = \varepsilon + \operatorname{sgn} \varepsilon,$$

если входной шум — гауссов.

# СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

- Управляемость и наблюдаемость непрерывных систем
- Устойчивость непрерывных линейных систем управления
- Чувствительность и робастность систем управления
- Динамические характеристики линейных систем управления
- Динамические характеристики типовых звеньев линейной системы
- Упражнения

## 5.1. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Задача управления системой состоит в определении такой функции  $\mathbf{u}(t)$ , при которой осуществляется целенаправленное движение системы. Но можно ли быть уверенным в том, что эта задача всегда разрешима? Положительный ответ на этот вопрос предопределяется двумя свойствами линейной системы — ее **управляемостью** и **наблюдаемостью**.

**Определение.** *Линейная система*

$$\Sigma^{(n)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}): \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); & \mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

является **вполне управляемой**, если она может быть переведена из любого начального состояния  $\mathbf{x}(0)$  в любое другое состояние  $\mathbf{x}(T)$  за конечное время  $T$ .

**Теорема** (R. Kalman, 1958). *Линейная система  $\Sigma^{(n)}$ :  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  является вполне управляемой тогда и только тогда, когда*

$$\text{rank} \mathbf{R} = n, \quad \mathbf{R} = (\mathbf{B}; \mathbf{A}\mathbf{B}; \mathbf{A}^2\mathbf{B}; \dots; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}). \quad (5.1)$$

Заметим, что если размеры матриц состояния и управления  $\mathbf{A}_{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}_{n \times m}$ , то матрица управляемости  $\mathbf{R}$  имеет размер  $n \times mn$ .

**Определение.** *Линейная система  $\Sigma^{(n)}$ :  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  является вполне наблюдаемой, если любое ее состояние  $\mathbf{x}(0)$  можно восстановить по значениям  $\mathbf{u}(t)$  и  $\mathbf{y}(t)$ , измеренным на интервале  $0 \leq t \leq T$ .*

**Теорема** (R. Kalman, 1958). *Линейная система  $\Sigma^{(n)}$ :  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  является вполне наблюдаемой тогда и только тогда, когда*

$$\text{rank} \mathbf{Q} = n, \quad \mathbf{Q} = (\mathbf{C}^T; \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T; (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T; \dots; (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T). \quad (5.2)$$

Заметим, что если размеры матриц состояния и управления  $\mathbf{A}_{n \times n}$ ,  $\mathbf{C}_{k \times n}$ , то матрица наблюдаемости  $\mathbf{Q}$  имеет размер  $n \times kn$ .

Теоремы Калмана можно использовать как **критерии полной управляемости и наблюдаемости линейной системы**.

Управляемость и наблюдаемость как характеристические свойства системы обладают в определенном смысле симметрией.

**Определение.** *Линейные системы*

$$\begin{aligned} \Sigma^{(n)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}): \quad \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}; \\ \Sigma^{(n)}(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T): \quad \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{A}^T\mathbf{p} + \mathbf{C}^T\mathbf{u}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{B}^T\mathbf{p} \end{aligned} \quad (5.3)$$

называют **двойственными (взаимно дуальными)**.

**Теорема** (R. Kalman, 1961). *Линейная система  $\Sigma^{(n)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  является вполне управляемой в том и только том случае, если дуальная ей система  $\Sigma^{(n)}(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T)$  вполне наблюдаема.*

*Линейная система  $\Sigma^{(n)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  является вполне наблюдаемой в том и только том случае, если дуальная ей система  $\Sigma^{(n)}(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T)$  вполне управляема.*

**Примеры:**

**1.** Какими свойствами обладает система, заданная матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (0 \ 1).$$

Система является вполне управляемой и вполне наблюдаемой, поскольку

$$\begin{aligned} \text{rank}(\mathbf{B}:\mathbf{A}\mathbf{B}) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} = 2; \\ \text{rank}(\mathbf{C}^T:\mathbf{A}^T\mathbf{C}^T) &= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2. \end{aligned}$$

**2.** Проверить свойство управляемости системы, заданной матрицами

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$
- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Эти системы не являются вполне управляемыми, поскольку для этих систем второго порядка ранг матрицы управляемости оказывается равным единице.

Причина неуправляемости второй системы очевидна. В самом деле, из второго уравнения этой системы  $\dot{x}_2 = -x_2$ , следует, что координата  $x_2 = e^{-t}$  — изменяется вне зависимости от управления.

**3.** Проверить свойства наблюдаемости системы

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

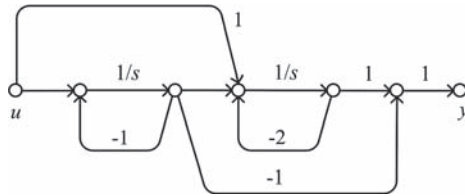


Рис. 5.1

Система, необладающая свойствами полной управляемости и наблюдаемости

$$\dot{x}_2 = u$$

в двух случаях, когда  $\mathbf{C} = (1 \ 0)$  и  $\mathbf{C} = (0 \ 1)$ .

В первом случае система является вполне наблюдаемой, поскольку выполняется критерий наблюдаемости  $\text{rank} \mathbf{Q} = 2$ .

Во втором случае критерий не выполняется  $\text{rank} \mathbf{Q} = 1$ . Система не является вполне наблюдаемой. Причина состоит в том, что измеряя лишь скорость перемещения  $x_2(t)$ , можно определить только перемещение, но не расстояние от точки отсчета и поэтому  $x_1(t)$  неопределимо.

**4.** Верно ли, что представленная на рис. 5.1 система не является вполне управляемой и вполне наблюдаемой?

Действительно система не обладает этими свойствами, в чем можно убедиться, применив критерии Калмана или путем вычисления ее передаточной функции.

**5.** Какие значения должны принимать параметры  $k_1, k_2$ , чтобы система стабилизации

$$\dot{x}_1 = x_2 + u(t);$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 + 2u(t);$$

$$u(t) = k_1 x_1 + k_2 x_2$$

приобрела свойства полной управляемости и наблюдаемости?

Для полной управляемости системы стабилизации необходимо и достаточно, чтобы  $k_1 \neq -5, 5$ . Для полной наблюдаемости этой системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие  $k_1 - k_2 \neq -0, 333$ . Эти результаты получены путем прямого использования критериев.

## 5.2. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

При исследовании автоматических систем изучают их поведение на длительном интервале времени с целью установить могут ли координаты состояния или выход системы со временем неограниченно возрасти. Эти вопросы связаны с понятием устойчивости движений системы или устойчивости решений дифференциальных уравнений — модели системы.

Пусть рассматривается система, в которой отсутствует входное воздействие. Система совершает собственные движения от запасенной энергии. Такие системы называют **автономными**.

Рассмотрим автономную систему  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$  и ее некоторое движение  $\mathbf{x}^*(t)$ , называемое *невозмущенным*.

**Определение.** *Невозмущенное движение  $\mathbf{x}^*(t)$  называют устойчивым по Ляпунову, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для всех движений  $\mathbf{x}(t)$  системы, удовлетворяющих условию  $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*(0)\| < \delta(\varepsilon)$ , справедливо неравенство*

$$\exists t_1, \forall t > t_1, \quad \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| < \varepsilon.$$

Иными словами, движение  $\mathbf{x}^*(t)$  устойчиво, если достаточно близкие к нему в начальный момент движения  $\mathbf{x}(t)$  не отклонятся дальше чем далеко от  $\mathbf{x}^*(t)$ , навсегда погружаясь, начиная с некоторого момента времени, в сколь угодно узкую  $\varepsilon$ -трубку вокруг невозмущенной траектории  $\mathbf{x}^*(t)$ .

**Определение.** *Движение  $\mathbf{x}^*(t)$  называют асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и существует  $\gamma > 0$  такое, что все движения  $\mathbf{x}(t)$  системы, удовлетворяющие условию  $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*(0)\| < \gamma$ , обладают свойством*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| = 0.$$

Иначе говоря, движение  $\mathbf{x}^*(t)$  — асимптотически устойчиво, если все движения достаточно близкие к нему в начальный момент, стягиваются со временем к  $\mathbf{x}^*(t)$  сколь угодно близко.

Рассмотрим линейную систему

$$\Sigma^{(n)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}): \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

и соответствующую ей однородную систему  $\Sigma_0^{(n)}(\mathbf{A}): \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ .

**Определение.** *Линейную систему  $\Sigma^{(n)}$  называют устойчивой, если все ее движения устойчивы.*

**Теорема.** *Для устойчивости линейной системы  $\Sigma^{(n)}$  при любом управлении  $\mathbf{u}(t)$  необходимо и достаточно, чтобы было устойчивым тривиальное движение*

$$\mathbf{x}^0(t) \equiv 0, \quad t \geq 0$$

*однородной системы  $\Sigma_0^{(n)}$ .*

В самом деле, пусть  $\mathbf{x}^*(t)$  — некоторое устойчивое движение системы  $\Sigma^{(n)}$ . Это значит, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любого движения  $\mathbf{x}(t)$  системы  $\Sigma^{(n)}$  справедливо неравенство

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| < \varepsilon,$$

если только  $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*(0)\| < \delta$ .

Обозначим  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)$ . Ясно, что  $\mathbf{z}(t)$  — решение однородной системы  $\Sigma_0^{(n)}$  как разность решений неоднородной системы и, кроме того,  $\|\mathbf{z}(t)\| < \varepsilon$ , если

только  $\|\mathbf{z}(0)\| < \delta$ . Но это и означает, что тривиальное движение устойчиво по Ляпунову.

Таким образом, линейные системы обладают характеристическими свойствами:

- если хотя бы одно движение устойчиво, устойчивы все движения и значит устойчива сама система;
- если хотя бы одно движение неустойчиво, неустойчивы все ее движения и значит неустойчива вся система;
- линейная неоднородная система устойчива тогда и только тогда, когда устойчива однородная система.

Рассмотрим линейную однородную стационарную систему  $\Sigma_0^{(n)} : (\mathbf{A})$  и пусть  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  — собственные числа матрицы  $\mathbf{A}$ .

**Теорема** (А. М. Ляпунов, 1892). *Линейная стационарная система  $\Sigma_0^{(n)} : (\mathbf{A})$  устойчива тогда и только тогда, когда для всех ее собственных чисел  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ .*

*Линейная стационарная система  $\Sigma_0^{(n)} : (\mathbf{A})$  асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда для всех ее собственных чисел  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ .*

### Примеры:

**1.** Является ли асимптотически устойчивым движение математического маятника?

Собственные числа матрицы состояния линейной модели движения математического маятника равные  $\lambda_{1,2} = \pm j$  имеют нулевую вещественную часть, поэтому движение — устойчиво по Ляпунову, однако не асимптотически.

**2.** Является ли устойчивым движение перевернутого математического маятника (см. рис. 2.4, б)?

Линейная модель перевернутого математического маятника имеет среди собственных чисел матрицы состояний

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -kM^{-1}, \lambda_3 = g\lambda^{-1}, \lambda_4 = -g\lambda^{-1},$$

одно с положительной вещественной частью, поэтому такая система неустойчивая.

**3.** Будет ли устойчивой однородная система с матрицей состояния

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}?$$

Найдем собственные числа матрицы, для чего составим ее характеристическое уравнение

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -4 \\ 1 & \lambda + 3 \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Корни этого уравнения  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ , система — неустойчивая.

**4.** Будет ли устойчивой управляемая система  $\Sigma^{(3)} : (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ , если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (0 \quad -1 \quad 1)?$$

Для ответа на вопрос достаточно исследовать собственные числа матрицы  $A$ . Составим характеристическое уравнение этой матрицы

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 3 & -1 & -3 \\ 1 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0.$$

Корни этого уравнения  $\lambda_1 = -4$ ,  $\lambda_{2,3} = -5 \pm 1,32j$  имеют отрицательные действительные части, следовательно, располагаются в левой комплексной полуплоскости, поэтому все движения системы будут асимптотически устойчивыми.

5. Разомкнутая часть системы управления задана передаточной функцией

$$W(s) = \frac{12}{s(s+1)(s+3)}.$$

Будет ли устойчивой система после замыкания ее разомкнутой части единичной отрицательной обратной связью?

Характеристический многочлен замкнутой системы — знаменатель передаточной функции замкнутой системы

$$H(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{12}{s(s+1)(s+3) + 12},$$

поэтому характеристическое уравнение системы принимает вид

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 12 = 0.$$

Корни этого уравнения  $\lambda_1 = -4$ ,  $\lambda_{2,3} = \pm 1,732j$ . Система после замыкания теряет свойство асимптотической устойчивости, но еще остается устойчивой.

### 5.3. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ И РОБАСТНОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В процессе функционирования автоматическая система всегда испытывает воздействие возмущений, которые приводят к изменению ее параметров, и как следствие, к ухудшению качества управления.

Способность системы изменять свои свойства в ответ на локальное изменение параметров называют **чувствительностью**, а способность, в той или иной мере, не реагировать на изменение параметров и внешних возмущений называют **робастностью** системы.

Чувствительность и робастность как свойства системы используют при решении задач анализа и синтеза систем управления. Мету чувствительности системы управления определяют по характеру ее возмущенного движения в окрестности известного базового движения  $\mathbf{x}(t; \alpha)$ . Вариация параметров  $\Delta\alpha$  приводит к возмущенному движению  $\mathbf{x}(t; \alpha + \Delta\alpha)$ , которое отличается от невозмущенного на

$$\Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; \alpha + \Delta\alpha) - \mathbf{x}(t; \alpha)$$

и называется *дополнительным движением* системы. Дополнительное движение описывают конечным куском ряда Тейлора

$$\Delta \mathbf{x}(t) \approx \frac{\partial \mathbf{x}(t; \alpha)}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{\partial^2 \mathbf{x}(t; \alpha)}{\partial \alpha^2} \frac{\Delta \alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\partial^k \mathbf{x}(t; \alpha)}{\partial \alpha^k} \frac{\Delta \alpha^k}{k!}.$$

И при достаточно малой вариации  $\Delta \alpha$  возмущенное движение оказывается линейным относительно этой вариации параметров

$$\mathbf{x}(t; \alpha + \Delta \alpha) \simeq \mathbf{x}(t; \alpha) + \frac{\partial \mathbf{x}(t; \alpha)}{\partial \alpha} \Delta \alpha.$$

**Определение.** Частные производные

$$\frac{\partial^k \mathbf{x}(t; \alpha)}{\partial \alpha^k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

называют *функциями чувствительности  $k$ -го порядка вектора состояния системы по параметру  $\alpha$* .

Функция чувствительности первого порядка вектора состояния по параметру  $\alpha$

$$\mathbf{S}_\alpha^x(t; \alpha) = \frac{\partial \mathbf{x}(t; \alpha)}{\partial \alpha}$$

имеет вид матрицы Якоби размера  $n \times k$

$$\mathbf{S}_\alpha^x = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_k} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_k} \end{pmatrix}.$$

Частную производную вида

$$L\mathbf{S}_\alpha^x = \frac{\partial(\ln \mathbf{x}(t; \alpha))}{\partial \ln \alpha} \quad (5.5)$$

называют *логарифмической функцией чувствительности*.

$$L\mathbf{S}_\alpha^x = \frac{\partial \mathbf{x}(t; \alpha)}{\mathbf{x}(t; \alpha)} \frac{\alpha}{\partial \alpha} = \mathbf{S}_\alpha^x(t; \alpha) \frac{\alpha}{\mathbf{x}(t; \alpha)}.$$

Функция чувствительности  $\mathbf{S}_\alpha^x(t; \alpha)$  непрерывной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t; \alpha), \quad t_0 = t_0(\alpha); \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\alpha)$$

является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{S}_\alpha^x(t; \alpha)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{S}_\alpha^x(t; \alpha) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha} \quad (5.6)$$



с начальным условием

$$\mathbf{x}_\alpha(t_0; \alpha) = \frac{d\mathbf{x}_0(\alpha)}{d\alpha} - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0; t_0, \alpha) \frac{dt_0(\alpha)}{d\alpha}.$$

Это уравнение называют **уравнением чувствительности**.

В частности для линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{u}(t)$$

уравнение чувствительности принимает вид

$$\frac{d\mathbf{S}_a^x(t; \alpha)}{dt} = \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{S}_a^x(t; \alpha) + \frac{\partial \mathbf{A}(\alpha)}{\partial \alpha} \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{B}(\alpha)}{\partial \alpha} \mathbf{u}.$$

Чувствительность автоматической системы с передаточной функцией  $H(s; \alpha)$ , зависящей от скалярного параметра  $\alpha$ , определяют:

функцию чувствительности передаточной функции

$$S_\alpha^H(s) = \frac{\partial H(s; \alpha)}{\partial \alpha}; \quad (5.7)$$

функции чувствительности частотных характеристик

$$\begin{aligned} S_\alpha^A &= \frac{\partial A(\omega; \alpha)}{\partial \alpha}, \\ S_\alpha^\varphi &= \frac{\partial \varphi(\omega; \alpha)}{\partial \alpha}, \\ S_\alpha^P &= \frac{\partial P(\omega; \alpha)}{\partial \alpha}, \\ S_\alpha^Q &= \frac{\partial Q(\omega; \alpha)}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Основной путь снижения чувствительности системы к изменению параметров — это увеличение коэффициента передачи контура, содержащего звенья с варьируемыми параметрами.

В частности, для системы канонической структуры, как следует из выражения для  $LS_{W_0}^H(s)$ , увеличение до бесконечности коэффициента усиления управляющего устройства, может привести к снижению до нуля чувствительности системы.

Нулевой чувствительности систем с внутренней положительной обратной связью (см. рис. 2.20, а) можно добиться, выполнив условие

$$W_1(s)W_2(s) = 1.$$

Не трудно заметить, однако, что условия обеспечения нулевой чувствительности системы физически нереализуемы, поскольку невозможно добиться бесконечного коэффициента усиления и невозможно точно реализовать обратные передаточные функции  $W_2(s) = W_1^{-1}(s)$  ибо невозможно точно выполнить операцию дифференцирования. Системы с нулевой чувствительностью являются предельными, идеальными системами.

Реальные автоматические системы должны быть достаточно грубыми, малочувствительными по отношению к возможным ошибкам, неточностям и неопределенностям, которые имеют место при составлении математической модели этих систем.

Указанные свойства объединяет понятие робастности, которое характеризует некоторые свойства не единственной системы, а целой совокупности систем, различаемых параметрически. Если математическая модель системы известна с точностью до значения некоторых параметров, то такую модель и систему называют *интервальной*.

Неопределенность значения каждого параметра  $a_k$  представляют обычно интервалом  $\alpha_k \leq a_k \leq \beta_k$ , а совокупности параметров — многомерным параллелепипедом. При изучении интервальных систем управления используют *робастные методы*, или *методы интервального анализа*.

Рассмотрим характеристический полином интервальной системы

$$\varphi_{\Sigma}(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n, \quad \alpha_k \leq a_k \leq \beta_k, \quad k = \overline{0, n},$$

который в силу интервальной неопределенности параметров называют *интервальным многочленом*.

Интересно, будет ли интервальная система устойчивой при всех изменениях параметров? В такой постановке задачи речь идет об устойчивости множества систем, а значит о робастной устойчивости.

Для системы порядка  $n$  параметрический параллелепипед

$$\{\alpha_k \leq a_k \leq \beta_k, \quad k = \overline{0, n}\}$$

имеет  $2^{n+1}$  вершин, этим вершинам отвечают  $2^{n+1}$  угловых полинома  $\varphi_{\Sigma}(\lambda)$ , для которых  $a_k = \beta_k$  или  $a_k = \alpha_k$ . Естественно полагать, что условия робастной устойчивости должны составлять требования: *для всех угловых полиномов иметь собственные числа в левой полуплоскости*.

Это утверждение оказалось верным. Но известен и более сильный результат.

**Теорема** (В. Л. Харитонов, 1978). *Для того чтобы линейная система с интервальным характеристическим полиномом  $\varphi_{\Sigma}(\lambda)$  была робастно устойчивой необходимо и достаточно, чтобы четыре угловых полинома с коэффициентами*

$$\begin{aligned} &\alpha_0, \alpha_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_4, \alpha_5, \beta_6, \dots \\ &\alpha_0, \beta_1, \beta_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_5, \beta_6, \dots \\ &\beta_0, \beta_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_4, \beta_5, \alpha_6, \dots \\ &\beta_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \beta_4, \alpha_5, \alpha_6, \dots \end{aligned}$$

*имели собственные числа в левой полуплоскости.*

Указанные четыре многочлена носят название *харитоновых полиномов*.

Заметим, что условия Харитонова для систем порядка не выше пятой избыточны, так для интервальной системы второго порядка робастную устойчивость обеспечивает положительность всех коэффициентов. Для системы третьего порядка робастную устойчивость обеспечивает один харитонов полиномом. Для систем четвертого и пятого порядка необходимые и достаточные условия составляют соответственно два и три харитоновых полинома с левыми собственными числами.

**Примеры:**

**1.** Исследовать чувствительность замкнутой системы с передаточной функцией

$$W(s; k) = \frac{k}{s^2 + 2s + 3 + k}$$

к изменению параметра в окрестности его базового значения  $k = 3$ .

Логарифмическая функция чувствительности может быть найдена по выражению

$$LS_k^w = S_k^w \frac{k}{W(s; k)},$$

где  $S_k^w$  — функция чувствительности первого порядка по параметру  $k$ .

$$S_k^w = \frac{\partial W(s; k)}{\partial k} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 3 + k)^2}.$$

Логарифмическая чувствительность

$$LS_k^W(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^2 + 2s + 6}.$$

На низких частотах чувствительность системы около 0,5, а на высоких — близка к 1,0.

**2.** Какова чувствительность передаточной функции инерционного звена  $W(s; k, T) = \frac{k}{Ts + 1}$  к изменению параметров  $k, T$ ?

Чувствительность инерционного звена к изменению параметров можно задавать функциями чувствительности амплитудной и фазовой частотных характеристик:

$$\begin{aligned} S_k^A &= \frac{T}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}, \\ S_T^A &= \frac{-kT}{(T^2\omega^2 + 1)\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}, \\ S_k^\varphi &= 0, \\ S_T^\varphi &= \frac{\omega T}{T^2\omega^2 + 1}. \end{aligned}$$

**3.** Определить показатели чувствительности системы, прямой трактом которой охвачен отрицательной обратной связью.

Определим первоначально чувствительность передаточной функции  $H(s; W, G)$  замкнутой системы по отношению к варьируемой передаточной функции прямого тракта  $W(s)$ , а затем к варьируемой передаточной функции отрицательной обратной связи  $G(s)$ .

Логарифмическую функцию чувствительности по отношению к передаточной функции прямого тракта определяют в виде

$$LS_W^H(s) = \frac{\partial H(s)}{\partial \ln W(s)} = \frac{\frac{\partial H(s)}{H(s)}}{\frac{\partial W(s)}{W(s)}} = \frac{\partial H(s)W(s)}{\partial W(s)H(s)}.$$

Поэтому, учитывая, что  $H(s; W, G) = \frac{W(s)}{1 + W(s)G(s)}$ , находим

$$LS_W^H(s) = \frac{1}{1 + W(s)G(s)} = \frac{H(s)}{W(s)}.$$

Аналогично во втором случае:

$$LS_G^H(s) = \frac{\ln H(s)}{\ln G(s)} = \frac{H(s)G(s)}{1 + W(s)G(s)} = H(s)W(s).$$

**4.** Исследовать чувствительность системы канонической структуры (см. рис. 2.11).

Чувствительность по отношению к варьируемой передаточной функции объекта равна

$$LS_{W_0}^H(s) = \frac{1}{1 + W_0(s)W_1(s)}.$$

Чувствительность системы с внутренней положительной обратной связью (см. рис. 2.20, а) по отношению к варьируемой передаточной функции объекта равна

$$LS_{W_0}^H(s) = \frac{1 - W_1(s)W_2(s)}{1 + W_0(s)W_1(s) - W_1(s)W_2(s)}.$$

**5.** Найти чувствительность выходного сигнала к внешнему возмущению для системы канонической структуры.

Выходной сигнал линейной системы канонической структуры определяет выражение

$$Y(s) = H_{yu}(s)U(s) + H_{yf}(s)F(s).$$

Положив в этом выражении  $u(t) \equiv 0$ , имеем  $Y(s) = H_{yf}(s)F(s)$ , где передаточная функция  $H_{yf}(s) = \frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)W_1(s)}$ .

Чувствительность выходного сигнала к возмущению определяет выражение

$$S_f^y(s) = \frac{\partial Y(s)}{\partial F(s)} = H_{yf}(s).$$

Влияние возмущения в замкнутых системах возможно устранить путем увеличения  $W_1(s)$ .

#### 5.4. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

*Динамическими характеристиками* системы называют ее реакции на специальные входные воздействия. Такими специальными воздействиями приняты сигналы: *единичный импульс, единичный скачок, линейный и гармонический сигналы.*

Приведем математические описания этих сигналов.

Единичный импульс (дельта-функция Дирака) определяют как функцию, которая всюду равна нулю, кроме точки приложения, в которой она равна бесконечности:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0; \\ \infty, & t = 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Интеграл от этой функции по любому интервалу, содержащему точку приложения равен единице.

Единичный скачок (функция Хевисайда) определяют как функцию, равную нулю на отрицательной полуоси и единице на положительной полуоси времени:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Функция единичный скачок обладает свойством:  $\frac{d}{dt}1(t) = \delta(t)$ .

Линейное воздействие  $kt1(t)$  определяют как функцию, равную нулю на отрицательной полуоси, которая линейно изменяется на положительной полуоси времени.

Гармоническое воздействие  $U_m e^{j\omega t} 1(t)$  определяют как функцию, равную нулю на отрицательной полуоси, которая гармонически изменяется на положительной полуоси времени.

Движение линейной системы

$$\Sigma^{(n)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}): \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); & \mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (5.11)$$

найдем в явном виде, используя преобразование Лапласа.

Пусть  $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{x}(t)]$ ,  $\mathbf{Y}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{y}(t)]$ ,  $\mathbf{U}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{u}(t)]$ , тогда из преобразованной модели движения находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s); \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{C}\mathbf{X}. \end{aligned}$$

Преобразовав это выражение обратно в действительную область, получим искомую реакцию системы на произвольное воздействие  $u(t)$ :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \quad (5.12)$$

Полученное выражение известно как **формула Коши** решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, которое является моделью движения системы (5.11).

При нулевых начальных условиях реакцию системы на произвольное воздействие  $\mathbf{u}(t)$  определяет выражение

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \quad (5.13)$$

Обозначив в этом выражении  $\mathbf{K}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ , получим

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{K}(t - \tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \quad (5.14)$$

Это выражение имеет форму интеграла свертки, поэтому в силу свойства симметрии свертки справедливо  $\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{K}(\tau)\mathbf{u}(t - \tau)d\tau$ .

Оба равносильных выражения описывают реакцию изначально покоящейся системы на входное воздействие  $\mathbf{u}(t)$ .

Пусть на систему с одним входом и одним выходом подано скалярное импульсное воздействие  $u(t) = \delta(t)$ . Реакцию системы на это воздействие

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t k(t - \tau)\delta(\tau)d\tau = k(t).$$

называют **импульсной характеристикой** системы.

В общем случае **матричная импульсная характеристика**  $\mathbf{K}(t)$  системы имеет размер  $k \times m$ , где  $k$  — число выходов и  $m$  — число входов системы.

Произвольный элемент  $k_{ij}(t)$  этой матрицы — реакция системы на  $i$ -м выходе от импульсного воздействия, приложенного к  $j$ -му входу в момент времени  $\tau$ ,  $0 \leq \tau < t$ .

Заметим, что преобразование Лапласа от матричной импульсной характеристики системы совпадает с выражением матричной передаточной функции системы

$$\mathcal{L}[\mathbf{K}(t)] = \mathcal{L}[\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}] = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{H}(s). \quad (5.15)$$

Для системы с одним входом и одним выходом  $\mathcal{L}[k(t)] = H(s)$ .

Пусть  $u(t) = 1(t)$  скалярное воздействие, реакция системы на единичный скачок, называемая **переходной характеристикой**  $h(t)$ , совпадает с интегралом от импульсной функции, а поэтому ее преобразование Лапласа равно:

$$\mathcal{L}[h(t)] = \frac{H(s)}{s}.$$

Функции

$$k(t) = \mathcal{L}^{-1}H(s), \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{H(s)}{s} \quad (5.16)$$

называют **временными динамическими характеристиками** системы.

Пусть на вход линейной системы  $\Sigma^{(n)}$ :  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  подается гармонический сигнал  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}_m e^{j\omega t}$ ,  $t \geq 0$ .

В силу линейных свойств системы в ней возникают две составляющие реакции — *установившаяся* и *переходная*. Переходная составляющая для асимптотически устойчивой системы со временем затухает, остается лишь установившаяся составляющая реакции системы на гармоническое воздействие. Эта составляющая также гармоническая и имеет вид

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{X}_m e^{j\omega t}.$$

Функция  $\mathbf{x}^*(t)$  является решением уравнения состояния системы  $\Sigma^{(n)}$ :  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  и поэтому, подставив ее в уравнение, получим

$$\mathbf{X}_m(j\omega)e^{j\omega t} = \mathbf{A}\mathbf{X}_me^{j\omega t} + \mathbf{B}\mathbf{U}_me^{j\omega t}.$$

Откуда заключаем, что  $\mathbf{X}_m = (j\omega\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_m$ .

Теперь установившаяся составляющая выходного сигнала системы  $\Sigma^{(n)}$ :  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  принимает вид

$$\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}_me^{j\omega t} = \mathbf{C}(j\omega\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_me^{j\omega t} = \mathbf{C}(j\omega\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(t).$$

Установившуюся реакцию системы с учетом (5.15) можно представить в виде  $\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{H}(j\omega)\mathbf{u}(t)$ .

Функцию  $\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{H}(s)\Big|_{s=j\omega}$  называют **матричной частотной характеристикой** системы.

Рассмотрим систему с одним входом и выходом. Установившийся процесс в системе будет иметь место тогда, когда промежуток времени между моментом приложения воздействия и текущим моментом бесконечно велик, поэтому положим в выражении реакции системы (5.14) нижний предел интеграла равным бесконечности

$$y^*(t) = \int_{-\infty}^t k(\tau)u(t - \tau)d\tau.$$

Если сделать замену  $t - \tau = z$ , то после соответствующего преобразования получим выражение для установившейся реакции системы на любой входной сигнал

$$y^*(t) = \int_0^{\infty} k(\tau)u(t - \tau)d\tau. \quad (5.17)$$

Воспользуемся этим выражением, чтобы найти установившуюся реакцию системы на входное гармоническое воздействие  $u(t) = U_me^{j\omega t}$ .

$$y^*(t) = \int_0^{\infty} k(\tau)U_me^{j\omega(t-\tau)}d\tau = \int_0^{\infty} k(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau U_me^{j\omega t} = H(j\omega)u(t).$$

Частотная характеристика  $H(j\omega)$  или комплексный коэффициент усиления, как комплексная функция комплексного переменного представима в декартовой и эйлеровой форме:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= P(\omega) + jQ(\omega), \\ H(j\omega) &= A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Функции

$$P(\omega) = \operatorname{Re}H(j\omega), \quad Q(\omega) = \operatorname{Im}H(j\omega);$$

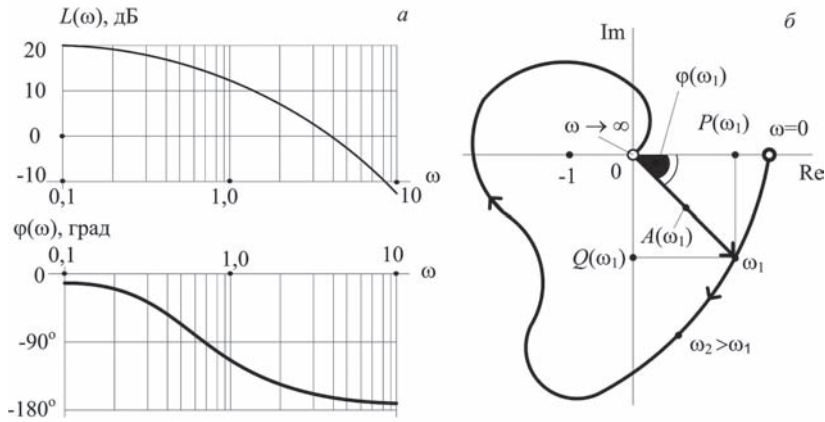


Рис. 5.2

Кривые Бode — логарифмическая амплитудно-частотная и логарифмическая фазочастотная характеристики (а); годограф Найквиста — комплексная амплитудно-фазовая характеристика (б)

$$A(\omega) = \text{mod}H(j\omega), \quad \varphi(\omega) = \text{arg}H(j\omega) \quad (5.19)$$

называются частотными характеристиками системы:  $P(\omega)$  — **вещественная** (ВЧХ),  $Q(\omega)$  — **мнимая** (МЧХ),  $A(\omega)$  — **амплитудная** (АЧХ),  $\varphi(\omega)$  — **фазовая** (ФЧХ).

Эти характеристики взаимосвязаны:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= A(\omega) \cos \varphi(\omega), \\ Q(\omega) &= A(\omega) \sin \varphi(\omega), \\ A(\omega) &= \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \\ \varphi(\omega) &= \text{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Строят частотные характеристики в логарифмическом масштабе, откладывая по оси абсцисс  $\lg \omega$ , по оси ординат  $20 \lg A(\omega)$  для амплитудной и  $\varphi(\omega)$  для фазовой частотной характеристики.

Полученные характеристики (H. W. Bode, 1945):

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |H(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \varphi(\lg \omega) \quad (5.21)$$

называют **логарифмической амплитудно-частотной** (ЛАЧХ) и **логарифмической фазочастотной** (ЛФЧХ) характеристикой, или **кривыми Бode** соответственно.

Отрезок логарифмической шкалы, соответствующий увеличению частоты в 10 раз, называют **декадой**, а отрезок, соответствующий увеличению частоты в 2 раза — **октавой**.

Единица измерения  $L(\omega)$  — **децибел** (дБ), а для  $\varphi(\omega)$  — градус (град) или радиан (рад).



Частотная характеристика является комплекснозначной функцией частоты, поэтому при фиксированном значении частоты — это комплексной вектор  $H(j\omega)$  (см. рис. 5.2). При изменении частоты от нуля до бесконечности конец вектора описывает на комплексной плоскости кривую

$$\{H(j\omega), \omega = \text{var} : 0 \leq \omega < \infty\},$$

которую называют **годографом Найквиста** частотной характеристики (*H. Nyquist, 1932*), или **амплитудно-фазовой** характеристикой системы.

Графическое представление частотной характеристики на декартовой плоскости, когда по оси абсцисс откладывается  $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$ , а по оси ординат значения  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$  называют **диаграммой Никольса** (*N. Nichols, 1942*).

Годограф Найквиста и диаграмма Никольса являются ориентированными параметрическими кривыми  $\omega : 0 \leq \omega < \infty$ .

Обычно рассматривают две группы частотных характеристик: для замкнутой системы  $H(j\omega)$ , представленной, например, основной структурой (см. рис. 2.11) и для разомкнутой части этой системы

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_0(j\omega).$$

Частотные характеристики замкнутой системы могут быть найдены через частотные характеристики разомкнутой системы графически с помощью номограмм замыкания или аналитически, используя выражение

$$H(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)}.$$

Очень часто передаточную функцию системы  $W(s)$  представляют дробно-рациональным выражением  $W(s) = \frac{B_m(s)}{A_n(s)}$ , в котором полиномы числителя и знаменателя

$$\begin{aligned} B_m(s) &= b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m, \\ A_n(s) &= s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \end{aligned}$$

имеют порядок  $m, n$  соответственно. Для реальных систем  $m \leq n$ .

Корни полинома  $B_m(s) = 0$  называют **нулями** передаточной функции системы, корни полинома  $A_n(s) = 0$  называют **полюсами** передаточной функции.

Полином  $A_n(s)$  является **характеристическим многочленом** системы с передаточной функцией  $W(s)$ , поэтому полюсы передаточной функции и характеристические числа системы совпадают.

Полюсы и нули в общем случае комплексные величины. Говорят, что полюс или нуль — **левый**, если он расположен в левой полуплоскости, вещественная часть такого полюсы или нуля отрицательна, **правый** — если его вещественная часть положительна и он располагается в правой полуплоскости, **нейтральный** — если он расположен на мнимой оси, его вещественная часть равна нулю.

**Примеры:**

1. Найти временные характеристики системы, внутренняя модель которой задается матрицами:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Передаточную функцию находим из соотношения

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{5}{s+5} & \frac{5}{s+5} \\ \frac{0,5}{s+10} & \frac{2}{s+10} \end{pmatrix}.$$

Теперь находим импульсную и переходную характеристики системы:

$$\mathbf{K}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{H}(s)] = \begin{pmatrix} 5e^{-5t} & 5e^{-5t} \\ 0,5e^{-10t} & 2e^{-10t} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbf{H}(s)}{s}\right] = \begin{pmatrix} 1 - e^{-5t} & 1 - e^{-5t} \\ 0,05(1 - e^{-10t}) & 0,2(1 - e^{-5t}) \end{pmatrix}.$$

2. Системы с одним входом и выходом имеют скалярные временные характеристики. Найти временные характеристики системы, внутренняя модель которой задана матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 2).$$

Находим передаточную функцию системы  $H(s) = \frac{2(s+5,5)}{(s+1)(s+3)}$ , по ней импульсную характеристику

$$k(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = 4,5e^{-t} - 2,5e^{-3t},$$

а затем и переходную характеристику системы

$$h(t) = \int_0^t k(t)dt = 3,67 - 4,5e^{-t} + 0,83e^{-3t}.$$

3. Найти реакцию звена с передаточной функцией  $W(s) = \frac{2}{0,1s+1}$  на входной единичный линейный сигнал.

Преобразование Лапласа входного сигнала имеет вид  $W(s) = \frac{1}{s^2}$ , поэтому преобразование Лапласа выходного сигнала принимает вид

$$Y(s) = \frac{2}{s^2(0,1s+1)}.$$

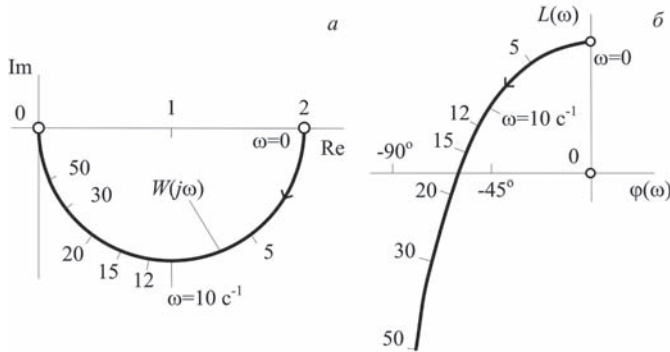


Рис. 5.3  
 Частотные характеристики системы: а — годограф Найквиста;  
 б — диаграмма Никольса.

Искомая реакция есть оригинал функции  $Y(s)$ .

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{s^2(0,1s + 1)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{0,02}{0,1s + 1} + \frac{2}{s^2} - \frac{0,2}{s} \right];$$

$$y(t) = 2(0,01e^{-10t} + t - 0,1).$$

4. Каким должен быть коэффициент передачи звена с передаточной функцией  $W(s) = \frac{k}{(s + 1)(s + 6)}$ , чтобы частота среза логарифмической амплитудно-частотной характеристики была равна  $5c^{-1}$ ?

На частоте среза амплитудно-частотная характеристика равна единице, поэтому

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 36)}} \Big|_{\omega=5} = \frac{k}{\sqrt{26 \cdot 61}} = 1,$$

следовательно,  $k = 39,8$ .

5. Найти частотные характеристики, построить годограф Найквиста и диаграмму Никольса для звена первого порядка с передаточной функцией  $W(s) = \frac{2}{0,1s + 1}$ .

Функцию  $W(j\omega) = \frac{2}{1 + 0,1j\omega}$  представим в декартовом виде

$$W(j\omega) = \frac{2(1 - j0,1\omega)}{(1 + j0,1\omega)(1 - j0,1\omega)} = \frac{2}{1 + 0,01\omega^2} - j \frac{0,2\omega}{1 + 0,01\omega^2}.$$

Откуда следует вид ВЧХ и МЧХ:

$$P(\omega) = \frac{2}{1 + 0,01\omega^2},$$

$$Q(\omega) = -\frac{0,2\omega}{1 + 0,01\omega^2}.$$

Теперь функцию  $W(j\omega)$  представим в эйлеровом виде

$$W(j\omega) = \frac{2}{\sqrt{1 + 0,01\omega^2}} \exp(-j \operatorname{arctg}(0,1\omega)),$$

откуда следует вид АЧХ и ФЧХ:

$$A(\omega) = \frac{2}{\sqrt{1 + 0,01\omega^2}},$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(0,1\omega).$$

Для построения годографа Найквиста следует найти несколько значений пар

$$\{(P(\omega), Q(\omega)), \quad \omega = \operatorname{var}: 0 \leq \omega < \infty\}:$$

$\omega, \text{ с}^{-1}$	0	5	10	12	15	20	30	50	$\infty$
$P(\omega)$	2	1,6	2	0,82	0,62	0,4	0,2	0,08	0
$Q(\omega)$	0	-0,8	-1,0	-0,98	-0,92	-0,8	-0,6	-0,38	0

Для построения диаграммы Никольса следует найти несколько значений пар

$$\{(L(\omega), \varphi(\omega)), \quad \omega = \operatorname{var}: 0 \leq \omega < \infty\}:$$

$\omega, \text{ с}^{-1}$	0	5	12	15	20	30	50	$\infty$
$L(\omega), \text{ дБ}$	6,02	5,05	2,15	0,90	-0,97	-3,98	-8,13	0
$\varphi(\omega), \text{ град}$	0	-26,6	-50,2	-56,3	-63,4	-71,6	-78,7	-90

На рис. 5.3 представлены годограф Найквиста и диаграмма Никольса.

### 5.5. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

При описании автоматических систем часто оказывается целесообразным расчленение системы на элементы не по функциональному назначению, а по динамическим свойствам. При этом различные по функциональному назначению элементы можно представить одним и тем же набором динамических звеньев, а сходные по назначению элементы — различными динамическими звеньями. Такой подход позволяет изучать динамические свойства системы по динамическим свойствам ограниченного набора базовых динамических звеньев.

Передаточная функция стационарной линейной системы — это отношение полиномов с действительными коэффициентами. Каждый такой полином представлен в виде произведения квадратных трехчленов, соответствующих парам комплексных сопряженных корней полиномов и линейных двучленов, соответствующих действительным корням и постоянной. Поэтому произвольную передаточную функцию определяет

формула в обобщенно-условном виде

$$H(s) = \frac{k s^{\nu} \prod(s+a) \prod(s^2+bs+c)}{s^{\mu} \prod(s+a) \prod(s^2+bs+c)}.$$

Такое представление позволяет рассматривать произвольный функциональный элемент с передаточной функцией  $H(s)$  в виде последовательного соединения базовых звеньев. Таких звеньев семь.

Придадим передаточным функциям этих звеньев *типовой вид*.

Звено:

- пропорциональное

$$W(s) = k;$$

- дифференцирующее

$$W(s; k) = ks;$$

- интегрирующее

$$W(s; k) = \frac{k}{s};$$

- инерционное

$$W(s; k, T) = \frac{k}{Ts + 1};$$

- форсирующее

$$W(s; k, T) = k(Ts + 1);$$

- колебательное

$$W(s; k, T, \zeta) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1};$$

- дважды форсирующее

$$W(s; k, T, \zeta) = k(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1).$$

Рассмотрим динамические характеристики типовых звеньев.

### **Пропорциональное звено**

Модель звена:  $y = ku$ .

Реальными примерами такого звена, при определенных предположениях могут быть: редуктор, операционный усилитель, рычаг, ток и напряжение в пассивной электрической  $RR$ -цепи, давление и поток жидкости в трубопроводе.

*Временные характеристики:*

$$k(t) = k\delta(t); \quad h(t) = k1(t). \quad (5.22)$$

*Частотные характеристики:*

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= k; \\ P(\omega) &= k, \quad Q(\omega) = 0; \\ A(\omega) &= k, \quad \varphi(\omega) = 0; \end{aligned}$$

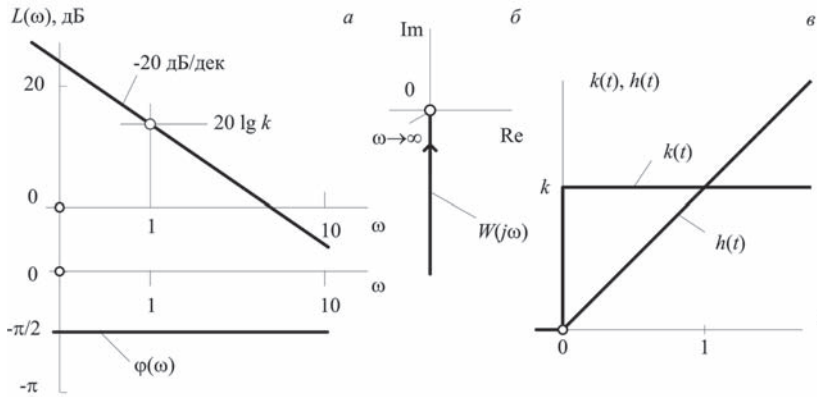


Рис. 5.4

Характеристики интегрирующего звена: а — логарифмические амплитудно-частотная и фазочастотная; б — годограф Найквиста; в — временные характеристики.

$$L(\omega) = 20 \lg k. \quad (5.23)$$

Годограф Найквиста — точка на действительной оси.

### Интегрирующее звено

Модель звена:  $\dot{y} = ku(t)$ ,  $y(0) = 0$ .

Реальными примерами такого звена могут быть: материальная точка, движущаяся под действием силы (вход — сила, выход — скорость); вращающееся тело (вход — угловая частота, выход — угол поворота); резервуар с жидкостью (вход — дебит, выход — уровень жидкости); двигатель постоянного тока с независимым возбуждением (вход — напряжение на якоре, выход — угол поворота вала); поршневой серводвигатель (вход — поток масла, выход — перемещение поршня), операционный усилитель с емкостью в обратной связи.

Передаточная функция:  $W(s; k) = \frac{k}{s}$ ,

где  $k$  — коэффициент передачи звена.

Временные характеристики:

$$k(t) = k; \quad h(t) = kt. \quad (5.24)$$

Частотные характеристики:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= -j \frac{k}{\omega}; \\ P(\omega) &= 0, \quad Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}; \\ A(\omega) &= \frac{k}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}; \\ L(\omega) &= 20 \lg k - 20 \lg \omega. \end{aligned} \quad (5.25)$$

*Годограф Найквиста* — отрицательная полупрямая на мнимой оси, при изменении частоты от нуля до бесконечности конец вектора  $W(j\omega)$  перемещается по мнимой оси от минус бесконечности до нуля. Характеристики интегрирующего звена представлены на рис. 5.4.

**Дифференцирующее звено**

Модель звена:  $y = k\dot{u}(t)$ .

Реальных примеров такого звена нет. Дифференцирующее звено — идеальное, физически нереализуемое.

Передающая функция:  $W(s; k) = ks$ .

Временные характеристики:

$$k(t) = k\delta(t), \quad h(t) = k, \quad (5.26)$$

где  $k$  — коэффициент передачи звена.

Частотные характеристики:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= jk\omega; \\ P(\omega) &= 0, \quad Q(\omega) = k; \\ A(\omega) &= k, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}; \\ L(\omega) &= 20\lg k + 20\lg\omega. \end{aligned} \quad (5.27)$$

*Годограф Найквиста* — положительная полупрямая на мнимой оси, при изменении частоты от нуля до бесконечности конец вектора  $W(j\omega)$  перемещается по мнимой оси от нуля до плюс бесконечности.

**Инерционное звено**

Модель звена:  $T\dot{y} + y = ku(t), \quad y(0) = 0$ .

Реальными примерами такого звена могут быть: материальная точка, движущаяся под действием силы в сопротивляющейся среде (вход — сила, выход — скорость); резервуар с гидравлическим сопротивлением на входе (вход — давление в магистрали, выход — давление внутри резервуара); двигатель постоянного тока с независимым возбуждением и ощутимой индуктивностью якорной цепи (вход — ток в якорной цепи, выход — частота вращения); пассивная  $RC$ -цепь (вход — напряжение питания, выход — напряжение на емкости); операционный усилитель с параллельными емкостью и резистором в обратной связи.

Передающая функция:  $W(s; k, T) = \frac{k}{Ts + 1}$ ,

где  $k$  — передаточный коэффициент;  $T$  — постоянная времени звена.

Временные характеристики:

$$k(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}; \quad h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}). \quad (5.28)$$

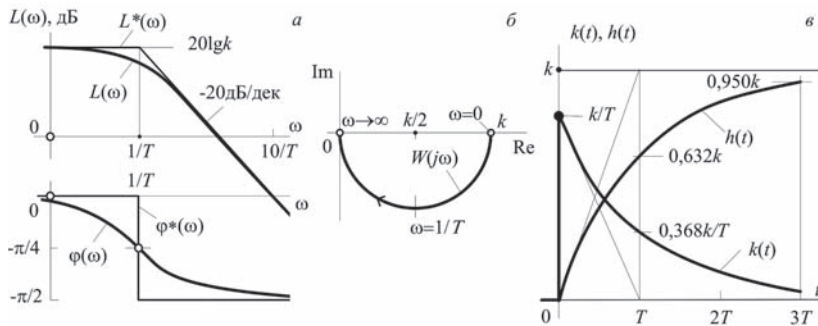


Рис. 5.5

Характеристики инерционного звена: а — логарифмические амплитудно-частотная и фазочастотная; б — годограф Найквиста; в — временные характеристики.

Частотные характеристики:

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) &= \frac{k}{1 + jT\omega}; \\
 P(\omega) &= \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{-kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}; \\
 A(\omega) &= \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg T\omega; \\
 L(\omega) &= 20\lg k - 20\lg\sqrt{(T^2\omega^2 + 1)}.
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Аппроксимация этой кривой имеет вид:

$$\hat{L}(\omega) = \begin{cases} 20\lg k, & \omega \ll \frac{1}{T}; \\ 20\lg k - 20\lg T\omega, & \omega \gg \frac{1}{T}. \end{cases} \tag{5.30}$$

Годограф Найквиста — полуокружность с центром в точке  $0,5k$ , которая начинается на действительной оси в точке  $k$  и заканчивается в пределе при  $\omega \rightarrow \infty$  в начале координат. Характеристики инерционного звена представлены на рис. 5.5.

**Форсирующее звено**

Модель звена:  $y = k(T\dot{u}(t) + u(t))$ .

Реальных примеров такого звена нет. Форсирующее звено — идеальное, физически нереализуемое.

Передаточная функция:  $W(s; k, T) = k(Ts + 1)$ ,

где  $k$  — передаточный коэффициент;  $T$  — постоянная времени звена.

Временные характеристики:

$$k(t) = k(T\dot{\delta}(t) + \delta(t)), \quad h(t) = k(T\delta(t) + \mathbf{1}(t)). \tag{5.31}$$



Частотные характеристики:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= k(1 + jT\omega); \\ P(\omega) &= k, \quad Q(\omega) = kT\omega; \\ A(\omega) &= k\sqrt{(T^2\omega^2 + 1)}, \quad \varphi(\omega) = \arctg T\omega; \\ L(\omega) &= 20\lg k + 20\lg\sqrt{(T^2\omega^2 + 1)}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Аппроксимация этой кривой имеет вид:

$$\hat{L}(\omega) = \begin{cases} 20\lg k, & \omega \ll \frac{1}{T}; \\ 20\lg k + 20\lg T\omega, & \omega \gg \frac{1}{T}. \end{cases} \quad (5.33)$$

Годограф Найквиста — полупрямая, которая начинается на действительной оси в точке  $k$  и уходит в  $\infty$  с увеличением частоты в бесконечность параллельно мнимой оси. Фазовое упреждение входного сигнала с ростом частоты может достигать  $90^\circ$ .

**Колебательное звено.**

Модель звена:  $T^2\ddot{y} + 2\zeta T\dot{y} + y = ku(t)$ ;  $\dot{y}(0) = y(0) = 0$ ;  $0 \leq \zeta < 1$ .

Реальными примерами такого звена могут быть: две емкости, способные запасать энергию или вещество и взаимно обмениваться их запасами. Например, сообщающиеся сосуды, соединенные через гидросопротивление, колебание массы на пружине с демпфером, двигатель постоянного тока с независимым возбуждением и ощутимой индуктивностью якорной цепи (вход — напряжение на якоре, выход — угол поворота вала); пассивная  $RLC$ -цепь (вход — напряжение питания, выход — напряжение на емкости).

Передаточная функция:  $W(s; k, T, \zeta) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1}$ ,  $0 \leq \zeta < 1$ ,

где  $k$  — передаточный коэффициент,  $T$  — постоянная времени звена,  $\zeta$  — относительный коэффициент затухания.

Временные характеристики:

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{k}{T^2\omega_1} e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t; \\ h(t) &= k\left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \theta)\right), \end{aligned} \quad (5.34)$$

где  $\alpha = \frac{\zeta}{T}$  — коэффициент затухания,  $\omega_1 = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$  — собственная частота колебаний,  $\omega_0 = \frac{1}{T}$  — резонансная частота колебаний,  $\theta = \arctg \frac{\omega_1}{\alpha}$ .

Частотные характеристики:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k}{1 - T^2\omega^2 + j2\zeta T}; \\ P(\omega) &= \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 - 4\zeta^2 T^2\omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-2k\zeta T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 - 4\zeta^2 T^2\omega^2}; \end{aligned}$$

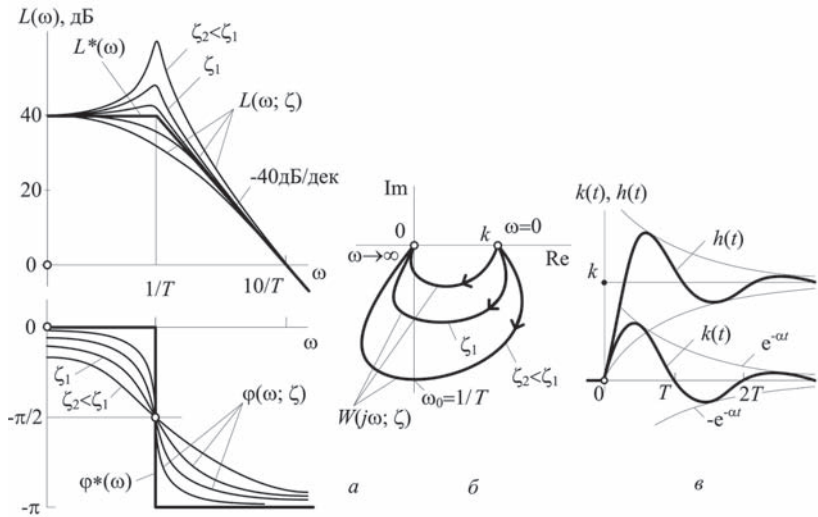


Рис. 5.6

Характеристики колебательного звена: а — логарифмические амплитудно-частотные и фазочастотные; б — годографы Найквиста; в — временные характеристики.

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 - 4\zeta^2 T^2\omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2\omega^2};$$

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2\omega^2}. \quad (5.35)$$

Аппроксимация этого семейства кривых имеет вид

$$\hat{L}(\omega) = \begin{cases} 20\lg k, & \omega \ll \frac{1}{T}; \\ 20\lg k - 40\lg T\omega, & \omega \gg \frac{1}{T}. \end{cases} \quad (5.36)$$

Максимальная погрешность аппроксимации имеет место на сопрягающей частоте  $\frac{1}{T}$  и зависит от величины  $\zeta$ . Например, для  $\zeta = 0,7$  и  $\zeta = 0,1$  погрешность составляет соответственно 3 дБ и 14 дБ.

Годограф Найквиста — начинается на действительной оси в точке  $k$ , располагается в двух квадрантах, пересекает на резонансной частоте  $\omega_0 = \frac{1}{T}$  мнимую ось в точке  $-\frac{k}{2\zeta}$  и заканчивается при бесконечной частоте в начале координат.

Характеристики колебательного звена представлены на рис. 5.6.

Частный случай колебательного звена при  $\zeta = 0$  называют **консервативным звеном**. Для этого звена резонансная частота совпадает с собственной  $\omega_0 = \omega_1$ .

Передаточная функция:  $W(s; k, T) = \frac{k}{T^2 s^2 + 1}$ .

Временные характеристики:

$$k(t) = \frac{k}{T} \sin \omega_0 t, \quad h(t) = k(1 - \cos \omega_0 t). \quad (5.37)$$

Частотные характеристики:

$$\begin{aligned} W(\omega) &= \frac{k}{1 - T^2 \omega^2}; \\ P(\omega) &= \frac{k}{1 - T^2 \omega^2}, \quad Q(\omega) = 0; \\ A(\omega) &= \frac{k}{1 - T^2 \omega^2}, \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < \omega_0; \\ -\pi, & \omega \geq \omega_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Годограф Найквиста — начинается на действительной оси в точке  $k$ , целиком располагается на действительной оси, имеет разрыв, на резонансной частоте  $\omega_0 = \frac{1}{T}$  уходит в бесконечность и при дальнейшем увеличении частоты возвращается по отрицательной части действительной оси в начало координат.

**Форсирующее звено второго порядка**

Модель звена:  $y = k(T^2 \ddot{u}(t) + 2\zeta T \dot{u}(t) + u(t))$ .

Реальных примеров такого звена нет. Форсирующее звено второго порядка — физически нереализуемое, идеальное.

Передаточная функция:  $W(s; k, T, \zeta) = k(T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1)$ .

Временная характеристика:

$$h(t) = k(T^2 \delta(t) + 2\zeta T \delta(t) + 1(t)). \quad (5.39)$$

Частотные характеристики:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= k(1 - T^2 \omega^2 + j2\zeta T \omega); \\ P(\omega) &= k(1 - T^2 \omega^2), \quad Q(\omega) = 2k\zeta T \omega; \\ A(\omega) &= k\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{2\zeta T \omega}{1 - T^2 \omega^2}; \\ L(\omega) &= 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Аппроксимация этого семейства кривых имеет вид:

$$\hat{L}(\omega) = \begin{cases} 20 \lg k, & \omega \ll \frac{1}{T}; \\ 20 \lg k + 40 \lg T \omega, & \omega \gg \frac{1}{T}. \end{cases} \quad (5.41)$$

Годограф Найквиста — парабола, которая начинается на действительной оси в точке  $k$  и уходит с увеличением частоты в бесконечность во втором квадранте, пересекая мнимую ось на частоте  $\frac{1}{T}$  в точке  $2k\zeta$ . Фазовое упреждение входного сигнала с ростом частоты может достигать  $180^\circ$ .

К типовым звеньям относят **звено запаздывания**, передаточная функция которого не имеет дробно-рационального представления, являясь трансцендентным выражением.

*Модель звена:*  $y(t) = u(t - \tau)$ .

Реальными примерами такого звена являются: конвейер, трубопровод, длинные материальные линии, в которых вход — входной поток, выход — выходной поток.

*Передаточная функция:*  $W(s; \tau) = e^{-s\tau}$ .

*Временные характеристики:*

$$k(t) = \delta(t - \tau), \quad h(t) = 1(t - \tau). \quad (5.42)$$

*Частотные характеристики:*

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= e^{-j\omega\tau}; \\ P(\omega) &= \cos \omega\tau, \quad Q(\omega) = \sin \omega\tau; \\ A(\omega) &= 1, \quad \varphi(\omega) = -\omega\tau; \\ L(\omega) &= 0. \end{aligned} \quad (5.43)$$

*Годограф Найквиста* — окружность единичного радиуса, которая при  $\omega = 0$  проходит через точку  $k$  на действительной оси и бесконечно с ростом частоты периодически повторяется.

К группе типовых звеньев относятся так называемые **неминимально-фазовые звенья**. Это звенья первого и второго порядка, у которых хотя бы один полюс или нуль — правый, например:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{k}{Ts - 1}; \quad W(s) = k(Ts - 1); \\ W(s) &= \frac{k}{T^2s^2 - 2\zeta Ts + 1}; \\ W(s) &= k(T^2s^2 - 2\zeta Ts + 1); \\ W(s) &= \frac{k}{T^2s^2 - 2\zeta Ts - 1}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Основная особенность таких звеньев — большой фазовый сдвиг по сравнению со звеньями, имеющими такую же амплитудно-частотную характеристику. Действительно, если для звена  $W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$  фазочастотная характеристика  $\varphi(\omega) = -\arctg T\omega$ , то для звена вида  $W(s) = \frac{k}{Ts - 1}$  фазочастотная характеристика  $\varphi(\omega) = -\pi + \arctg T\omega$ .

Частотный годограф этого звена — полуокружность, которая начинается на действительной оси в точке  $-1$  и заканчивается предельно в начале координат, находясь в третьем квадранте.

**Динамические характеристики соединений типовых звеньев**

Пусть в частном случае два типовых звена соединены последовательно. Амплитудная и фазовая частотные характеристики такой пары определяются из частотных характеристик звеньев.

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= W_1(j\omega)W_2(j\omega) = A_1(\omega)A_2(\omega)e^{j(\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega))}; \\ L(\omega) &= L_1(\omega) + L_2(\omega); \\ \varphi(\omega) &= \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Очевидно обобщение этого результата на случай произвольного числа последовательно соединенных звеньев.

Для построения логарифмических частотных характеристик соединения используются асимптотические логарифмические частотные характеристики звеньев с последующим внесением поправок при необходимости.

- На первом шаге процедуры построения логарифмической амплитудной характеристики в точке  $\omega = 1$  откладывают ординату  $20\lg k$ , где  $k$  — коэффициент усиления всего соединения. Через полученную точку проводится низкочастотная асимптота с наклоном  $-20(\mu - \nu)$ , дБ/дек., где  $\mu$  — число интегрирующих звеньев;  $\nu$  — число дифференцирующих звеньев в соединении.

- На втором шаге определяют сопрягающие частоты асимптотических характеристик звеньев, нумеруют в порядке возрастания и расставляют по оси абсцисс.

- На третьем шаге низкочастотная асимптота продолжается до первой сопрягающей частоты. В этой точке наклон характеристики меняется в зависимости от типа звена, для которого эта частота является сопрягающей. Полученную прямую продолжают до следующей отмеченной сопрягающей частоты, в которой вновь меняется наклон. Процесс изменения наклона отрезков характеристики заканчивают после последней сопрягающей частоты построением высокочастотной асимптоты характеристики соединения.

- Процедуру построения завершают сглаживанием характеристики на сопрягающих частотах колебательных и дважды форсирующих звеньев.

Аналогично строят логарифмическую фазочастотную характеристику соединений звеньев.

Частотные характеристики параллельного соединения звеньев и соединения с обратной связью удобно строить с помощью специальных номограмм.

**Примеры:**

**1.** Построить частотный годограф Найквиста объекта второго порядка, у которого два левых комплексно-сопряженных полюса и один нуль в начале координат. Годограф Найквиста имеет вид окружности, которая проходит через начало координат с центром на действительной полуоси.

**2.** Найти переходную функцию, построить логарифмическую амплитудно-частотную характеристику, логарифмическую фазочастотную характеристику и годограф Найквиста для последовательно включенных инерционного и форсирующего звеньев с передаточными функциями:  $W_1(s) = 2s + 1$ ,  $W_2(s) = \frac{3}{s + 1}$ .

Передаточная функция соединения  $W(s) = \frac{3(2s+1)}{s+1}$ , его переходная функция

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{3(2s+1)}{s(s+1)} \right] = 3(1 + e^{-t}).$$

Годограф Найквиста  $W(j\omega) = \frac{3(1+2\omega^2+j\omega)}{1+\omega^2}$  представляется полуокружностью, которая полностью располагается в верхней полуплоскости и которая берет начало в точке  $3, 0$  на действительной оси и завершается в точке  $6, 0$ .

На рис. 5.7, а, б приведены логарифмические характеристики и годограф Найквиста соединения.

**3.** Найти переходную функцию и построить годограф Найквиста для параллельно включенных пропорционального и инерционного звеньев с передаточными функциями:  $W_1(s) = -2$ ,  $W_2(s) = \frac{5}{s+1}$ .

Передаточная функция соединения  $W(s) = W_1(s) + W_2(s) = \frac{3-2s}{s+1}$ . Результатом соединения оказалось неминимально-фазовое звено.

Переходная функция соединения

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{3-2s}{s(s+1)} \right] = 3 - 5e^{-t}.$$

Годограф Найквиста  $W(j\omega) = \frac{3-2\omega^2-j5\omega}{1+\omega^2}$  представляется полуокружностью, полностью располагается в нижней полуплоскости и берет начало в точке  $3, 0$  на действительной оси и завершается в точке  $-2, 0$ .

**4.** Найти переходную функцию и построить годограф Найквиста для параллельно включенных пропорционального звена и звена запаздывания с передаточными функциями:  $W_1(s) = 3$ ,  $W_2(s) = 4e^{-2s}$ .

Передаточная функция соединения

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s) = 3 + 4e^{-2s}.$$

Переходная функция

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 3, & 0 \leq t < 2; \\ 7, & t \geq 2. \end{cases}$$

Годограф Найквиста  $W(j\omega) = 3 + 4e^{-2j\omega}$  представляется окружностью с центром в точке  $3, 0$  на действительной оси и радиусом равным  $4, 0$ .

**5.** Построить частотные характеристики системы, с передаточной функцией разорванной части:

$$W(s) = \frac{k(T_1s+1)}{s(T_2s+1)(T_3^2s^2+2\zeta T_3s+1)},$$

где  $k = 4$ ;  $T_1 = 0, 033$  с;  $T_2 = 0, 2$  с;  $T_3 = 0, 008$  с;  $\zeta = 0, 1$ .

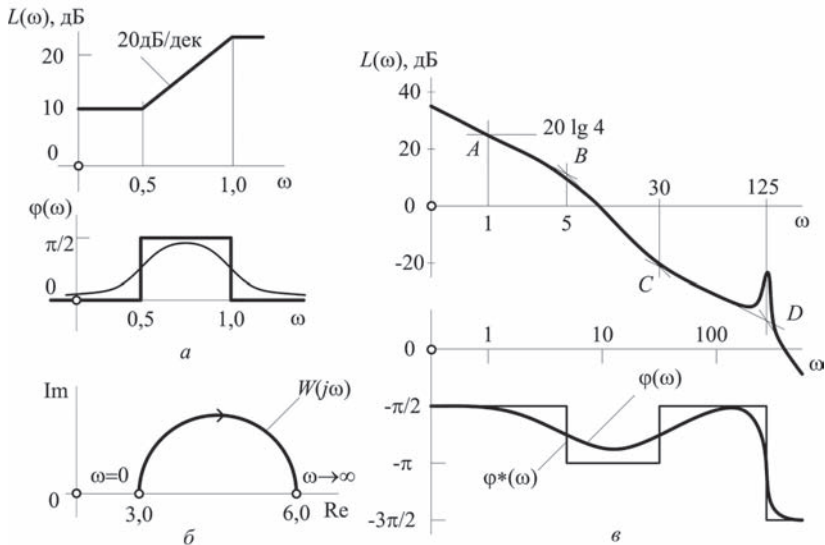


Рис. 5.7

Характеристики соединения инерционного и форсирующего звеньев: а — логарифмические, б — годограф Найквиста. Кривые Бодэ последовательного соединения трех звеньев (в)

Сопрягающие частоты по возрастанию:  $\omega_2 = 5$ ,  $\omega_1 = 30$ ,  $\omega_3 = 125$ .

На частоте  $\omega = 1$  откладываем ординату  $20 \lg k = 12,04$ . В этой точке А проводим низкочастотную асимптоту с наклоном  $-20$  дБ/дек. В точке В наклон изменяется до  $-40$  дБ/дек., в точке С наклон изменяется до  $-20$  дБ/дек., в точке D наклон становится  $-60$  дБ/дек.

В окрестности сопрягающей частоты  $\omega_3$ , которая отвечает колебательному звену, внесены поправки, соответствующие  $\zeta = 0,1$ .

Фазовая характеристика получена суммированием фазовых характеристик составляющих звеньев. Результат построения приведен на рис. 5.8 в.

## 5.6. УПРАЖНЕНИЯ

1. Системой двух связанных маятников одной длины (см. рис. 2.18, б) предполагается управлять двумя равными и противоположно направленными силами, приложенными к массам. Будет ли управляемой такая система?

2. Подобрать матрицы **A**, **B**, **C** для системы второго порядка, так чтобы она была:

- управляема и наблюдаема;
- управляема, но ненаблюдаема;
- неуправляема, но наблюдаема;
- неуправляема и ненаблюдаема.

**3.** Для системы  $\Sigma^{(n)}: (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  вполне наблюдаемой со скалярным входом и выходом, для которой  $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ , найти вектор начального состояния, используя измерения выходной и входной переменных.

**4.** Найти матричные временные и частотные характеристики а также переходной процесс в системе, модель которой задается матрицами:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (0 \ 1 \ 1).$$

**5.** Найти характеристическое уравнение, определить собственные числа и дать суждение об устойчивости линейной модели системы (см. 2.2, примеры 6, 7).

**6.** Построить временные и частотные характеристики неминимально-фазовых звеньев первого и второго порядков и для звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k(T_1 s + 1)}{s(T_2 s + 1)}.$$

**7.** Построить временные и частотные характеристики соединения типовых звеньев: пропорционального и дифференцирующего; пропорционального и интегрирующего; пропорционального, интегрирующего и дифференцирующего.

**8.** Построить временные и частотные характеристики последовательного и параллельного соединений звеньев запаздывания и пропорционального, интегрирующего и инерционного звеньев.

**9.** Построить, используя номограммы замыкания, частотные характеристики звена с передаточной функцией  $W_1(s) = \frac{200}{(0,08s + 1)(0,5s + 1)}$ , охваченного обратной

связью с  $W_2(s) = \frac{0,2s}{0,2s + 1}$ .

Построить временные и частотные характеристики последовательного и параллельного соединений звеньев запаздывания и пропорционального, интегрирующего и инерционного звеньев.

**10.** Построить логарифмические частотные характеристики и частотный годограф для системы с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k(T_1^2 s^2 + 2\zeta T_1 s + 1)}{s^2(T_2 s + 1)(T_3 s - 1)(T_4 s + 1)},$$

если  $k = 30$ ;  $T_1 = 0,8$  с;  $T_2 = 20$  с;  $T_3 = 8$  с;  $T_4 = 0,05$  с;  $\zeta = 0,2$ .



# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

- Метод Ляпунова для оценки устойчивости линейной системы
- Алгебраические критерии устойчивости
- Частотные критерии устойчивости
- Анализ параметрической устойчивости
- Упражнения

## 6.1. МЕТОД ЛЯПУНОВА ДЛЯ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Система автоматического управления должна быть устойчивой! Это свойство является необходимым.

Математическое понятие устойчивости линейной системы, введенное в 5.3, может быть сведено к пусть недостаточно строгому, но вполне ясному утверждению: *линейная система устойчива, когда ее реакция на любое ограниченное воздействие является ограниченной.*

**Теорема.** *Линейная система устойчива тогда и только тогда, когда ее импульсная характеристика абсолютно интегрируема:  $\int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau < \infty$ .*

Докажем справедливость этого утверждения, чтобы затем использовать его для доказательства теоремы Ляпунова об устойчивости линейных систем.

Пусть на вход устойчивой линейной системы действует ограниченный сигнал  $|u(t)| \leq U_m < \infty, \quad \forall t \geq 0$ .

Покажем, что если импульсная характеристика абсолютно интегрируема, то реакция системы будет ограниченной:

$$\forall t \geq 0, \quad |y(t)| \leq \int_0^t |k(\tau)u(t-\tau)| d\tau \leq U_m \int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau < \infty.$$

Это означает, что система устойчивая. Достаточность утверждения доказана.

Необходимость докажем от противного. Положим, что утверждение теоремы неверно и система устойчива, но интеграл от модуля импульсной характеристики неограничен.

Поскольку ограниченное входное воздействие произвольное, то пусть оно принимает вид  $u(t - \tau) = \operatorname{sgn}k(\tau)$ , тогда

$$y(t) = \int_0^t k(\tau) \operatorname{sgn}k(\tau) d\tau = \int_0^t |k(\tau)| d\tau.$$

Откуда следует, что при  $t \rightarrow \infty$   $\lim y(t) = \int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau = \infty$ .

Это противоречие с условием устойчивости системы доказывает справедливость утверждения теоремы.

**Следствие.** Поскольку  $H(s) = \mathcal{L}[k(t)]$ , то

$$|H(s)| \leq \int_0^{\infty} |k(t)| e^{-st} dt.$$

Переменная  $s$  — комплексная величина. Если точка  $s$  лежит в правой полуплоскости, то для нее  $|e^{-st}| \leq 1$ , и тогда для устойчивой системы согласно доказанной теореме справедливо соотношение  $|H(s)| < \infty$ .

Условие

$$|H(s)| < \infty, \operatorname{Re} s > 0 \quad (6.1)$$

может быть выполнено тогда и только тогда, когда у функции  $H(s)$  нет полюсов в правой полуплоскости. Полюсы передаточной функции суть характеристические корни системы. Значит, для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все характеристические корни системы не лежали в правой комплексной полуплоскости.

Правила, по которым можно судить об устойчивости системы, не решая характеристического уравнения, называют **критериями устойчивости**.

## 6.2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Впервые для частного случая линейной системы третьего порядка критерий устойчивости был сформулирован И. А. Вышнеградским при анализе устойчивости паровой машины с регулятором. В общем виде алгебраический критерий устойчивости линейной системы впервые сформулировал Э. Раус, а затем А. Гурвиц. Критерии являются необходимым и достаточным условиями того, что корни характеристического многочлена линейной системы

$$\varphi_n(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n, \quad a_0 > 0$$

с действительными коэффициентами имели отрицательные действительные части. Оба критерия эквивалентны, хотя и различны по форме.

• Составим по коэффициентам характеристического многочлена системы *таблицу Рауса*:

$$\begin{array}{cccc}
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 c_1 & c_3 & c_5 & \dots \\
 c_0 & c_2 & c_4 & \dots \\
 b_1 & b_3 & b_5 & \dots \\
 b_0 & b_2 & b_4 & \dots \\
 a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\
 a_0 & a_2 & a_4 & \dots
 \end{array} \tag{6.2}$$

по следующему правилу. Элементы двух последних строк — это коэффициенты характеристического многочлена системы, элементы двух предыдущих строк таблицы определяют формулы:

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; & b_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ a_0 & a_4 \end{vmatrix}; & \dots &; & b_{2k} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_{2k+3} \\ a_0 & a_{2k+2} \end{vmatrix}; \\
 b_1 &= \begin{vmatrix} b_0 & b_2 \\ a_0 & a_3 \end{vmatrix}; & b_3 &= \begin{vmatrix} b_0 & b_4 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}; & \dots &; & b_{2k+1} &= \begin{vmatrix} b_0 & b_{2k+2} \\ a_1 & a_{2k+3} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Элементы двух следующих строк таблицы  $c_k$  определяют те же формулы, в которых выполнена замена элементов  $a, b$  на элементы  $b, c$  соответственно.

**Критерий Рауса** (*E. J. Routh, 1877*). Для того чтобы все корни характеристического многочлена замкнутой системы имели отрицательные вещественные части необходимо и достаточно, чтобы все элементы первого столбца таблицы Рауса были положительными.

• Составим для линейной замкнутой системы по ее характеристическому полиному матрицу Гурвица:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

**Критерий Гурвица** (*A. Hurwitz, 1895*). Для того, чтобы все корни характеристического многочлена системы имели отрицательные вещественные части необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы Гурвица были положительными.

• Рассмотрим вспомогательную матрицу для системы, заданной внутренней моделью  $\Sigma^{(n)}$ :  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{E} - 2(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}. \tag{6.4}$$

**Критерий матричный** (*В. И. Зубов, 1959*). Для того чтобы система с матрицей состояния  $\mathbf{A}$  была асимптотически устойчивой необходимо и достаточно, чтобы последовательность матриц  $\{\mathbf{Z}^r, r = 1, 2, \dots\}$  стремилась к нулевой матрице с ростом числа  $r$ .

**Примеры:**

**1.** Найти по критерию Гурвица условия асимптотической устойчивости для линейной системы третьего порядка.

По характеристическому уравнению системы третьего порядка

$$\varphi_3(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3, \quad a_0 > 0$$

составляем матрицу Гурвица

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Условия Гурвица асимптотической устойчивости системы принимают вид

$$a_1 > 0, \quad a_1a_2 - a_0a_3 > 0.$$

**2.** Найти условия асимптотической устойчивости системы, заданной матрицей состояния:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ \beta & -1 & \alpha \\ 0 & \beta & -1 \end{pmatrix},$$

где  $\alpha, \beta$  — параметры системы.

Характеристический многочлен системы имеет вид

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + (3 - 2\alpha\beta)\lambda + (1 - 2\alpha\beta).$$

Поэтому для асимптотической устойчивости этой системы, согласно критерию Гурвица, достаточно, чтобы  $\alpha\beta < 0, 5$ .

**3.** Составить по критерию Рауса условия асимптотической устойчивости для системы четвертого порядка.

По характеристическому многочлену системы

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4, \quad a_0 > 0$$

составляем таблицу Рауса

$$\begin{array}{ccc} c_0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ b_0 & b_2 & 0 \\ a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4. \end{array}$$

Здесь  $b_0 = a_1a_2 - a_0a_3$ ;  $b_2 = a_1a_4$ ;  $b_1 = b_0a_3 - b_2a_1$ ;  $c_0 = b_1b_2$ .

Условия асимптотической устойчивости этой системы принимают вид:

$$a_1 > 0; \quad a_4 > 0; \quad a_1a_2 - a_0a_3 > 0; \quad a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4b_1 > 0.$$

4. Используя алгебраические критерии, показать, что замкнутая система управления, для которой известна передаточная функция разомкнутой части

$$W(s; k) = \frac{k(s+2)(s+3)}{s^3 + s^2 + 3s + 6}$$

будет асимптотически устойчивой при  $k > 0,6$ .

В самом деле, характеристический многочлен замкнутой системы управления принимает вид

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda + 6 + k(\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^3 + (1+k)\lambda^2 + (3+5k)\lambda + 6(1+k),$$

поэтому для асимптотической устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы

$$a_1 = 1+k > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 = (1+k)(3+5k) - 6(1+k) > 0.$$

Откуда следует, что  $k > -1$ ,  $5k^2 + 2k - 3 > 0$ . Второе неравенство справедливо при  $-1 > k > 0,6$ , поэтому замкнутая система будет асимптотически устойчивой при  $k > 0,6$ .

5. Определить по матричному критерию Зубова условия асимптотической устойчивости для системы, заданной матрицей состояния

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим вспомогательную матрицу Зубова для системы

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/9 & 5/9 \\ -2/9 & 7/9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Возводя эту матрицу последовательно в степени  $r > 1$ , получаем что для  $r \geq 8$  все члены матриц  $\mathbf{Z}^r$  с точностью 0,08 равны нулю. Следовательно согласно матричному критерию Зубова, система является асимптотически устойчивой.

### 6.3. ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим характеристический полином замкнутой системы

$$\varphi(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n, \quad a_0 > 0.$$

Кривую

$$\Phi(\omega) = \varphi(\lambda) \Big|_{\lambda=j\omega}, \quad \omega \in [0, \infty) \quad (6.5)$$

называют *годографом Михайлова* многочлена  $\varphi(\lambda)$ .

**Критерий Михайлова** (А.В. Михайлов, 1938). *Замкнутая линейная система порядка  $n$  будет асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда*

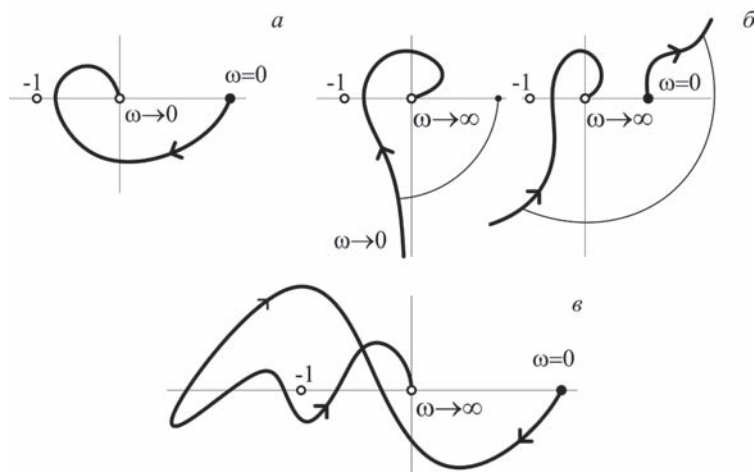


Рис. 6.1

Годографы Найквиста асимптотически устойчивой замкнутой системы, у которой разомкнутая часть: а — асимптотически устойчивая; б — устойчивая, но не асимптотически; в — неустойчивая.

годограф  $\Phi(\omega)$ , начиная с действительной оси, обходит последовательно в положительном направлении  $n$  квадрантов.

• Для суждения об устойчивости замкнутой линейной системы Г. Найквист предложил использовать частотные характеристики  $W(j\omega)$  ее разомкнутой части.

Параметрическую кривую

$$W(j\omega), \quad \omega \in [0, \infty) \quad (6.6)$$

называют *кривой*, или **годографом Найквиста**.

Рассмотрим три возможных случая применения критерия.

а) Система в разомкнутом состоянии асимптотически устойчива.

**Критерий Найквиста 1.** (Н. Nyquist, 1932). После замыкания система будет асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда годограф Найквиста не охватывает контрольной точки  $(-1, 0)$  комплексной плоскости.

б) Система в разомкнутом состоянии устойчива, но не асимптотически.

Характеристический полином разомкнутой части такой системы имеет нулевые и чисто мнимые корни, остальные корни — левые.

Если нулевых корней  $\nu$ , то годограф  $W(j\omega)$  доопределяется на нулевой частоте дугой бесконечно большого радиуса, начиная с действительной оси, раствором  $-\nu \frac{\pi}{2}$ .

Если чисто мнимых корней  $\mu$ , то годограф доопределяется на частоте разрыва дугой бесконечно большого радиуса, начиная с действительной оси, раствором  $-\mu\pi$ .

**Критерий Найквиста 2.** После замыкания система будет асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда годограф (6.6), дополненный на частотах разрыва дугами бесконечно большого радиуса, не охватывает контрольной точки  $(-1, 0)$ .

в) Система в разомкнутом состоянии неустойчива и имеет  $m$  правых полюсов.

**Критерий Найквиста 3.** После замыкания система будет асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда годограф (6.6) охватывает контрольную точку  $(-1, 0)$  в положительном направлении ровно  $\frac{m}{2}$  раз.

На рис. 6.1 представлены примеры годографов Найквиста для трех указанных случаев.

• Для суждения об устойчивости замкнутой системы по частотным характеристикам ее разомкнутой части  $X$ . Боде предложил использовать логарифмические частотные характеристики. Припишем на интервале положительности логарифмической амплитудной частотной характеристики  $L(\omega)$  переходу логарифмической фазовой характеристики уровня  $-\pi$  снизу-вверх число  $+1$  и переходу сверху-вниз число  $-1$ .

**Логарифмический критерий** (H. Bode, 1948). Если разомкнутая система имеет  $m$  правых полюсов, то для асимптотической устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы на интервале частот, когда  $L(\omega) > 0$ , число пересечений фазовой характеристикой уровня  $-\pi$  снизу-вверх превышало число пересечений сверху-вниз на  $\frac{m}{2}$ .

На рис. 6.2, а приведена иллюстрация логарифмического критерия Боде, соответствующая случаю на рис. 6.1, в.

В частном случае, когда система в разомкнутом состоянии асимптотически устойчива, для асимптотической устойчивости системы после замыкания необходимо и достаточно, чтобы на интервале частот, где  $L(\omega) > 0$ , фазовая характеристика совершила одинаковое число пересечений уровня сверху-вниз и снизу-вверх.

### Примеры:

1. Проверить по критерию Михайлова будет ли замкнутая система с характеристическим многочленом

$$A(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1$$

асимптотически устойчивой.

Годограф Михайлова задается функциями:

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= A(\lambda) \Big|_{\lambda=j\omega}; \\ \operatorname{Re} \Phi(j\omega) &= \omega^4 - 3\omega^2 + 1; \\ \operatorname{Im} \Phi(j\omega) &= -2\omega^3 + 2\omega.\end{aligned}$$

При изменении частоты от нуля до бесконечности годограф последовательно проходит через четыре квадранта. В самом деле, мнимая ось пересекается годографом на частотах, когда

$$\operatorname{Re} \Phi(j\omega) = \omega^4 - 3\omega^2 + 1 = 0: \quad \omega_1 = 0,618; \quad \omega_2 = 1,618.$$

Действительная ось пересекается годографом на частотах, когда

$$\operatorname{Im} \Phi(j\omega) = -2\omega^3 - 2\omega = 0: \quad \omega_1 = 0; \quad \omega_2 = 1,0.$$

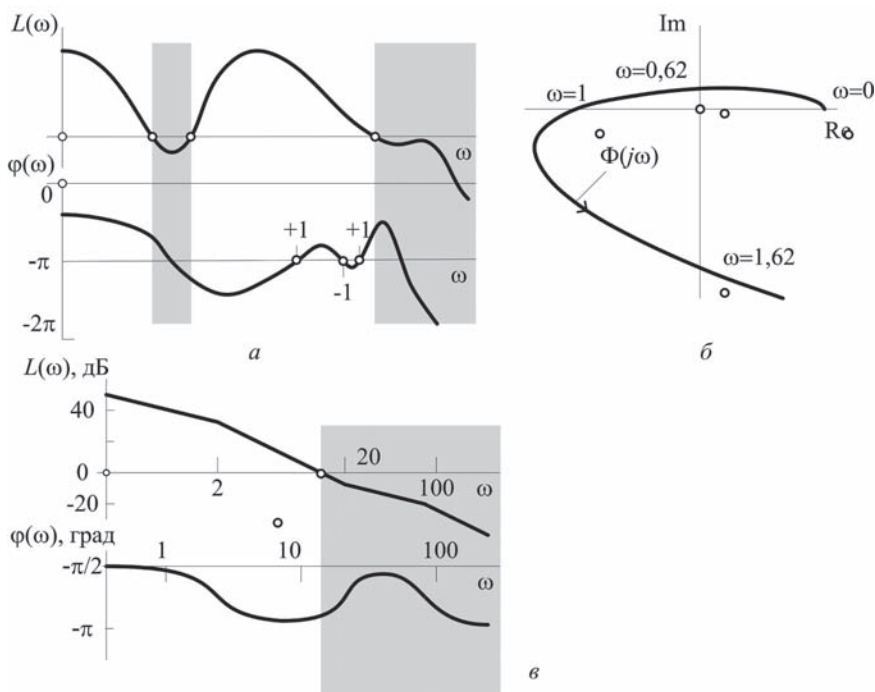


Рис. 6.2

Логарифмический критерий Боде (а). Годограф Михайлова асимптотически устойчивой системы (б). Логарифмические частотные характеристики системы с асимптотически устойчивой разомкнутой частью (в)

Пересечение осей чередуется, значит годограф Михайлова, как показано на рис. 6.2, б, последовательно проходит первый — четвертый квадранты. Поскольку пересечения осей больше нет годограф остается в четвертом квадранте, что доказывает асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

2. Проверить свойство асимптотической устойчивости замкнутой системы, если передаточная функция системы в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$W(s) = \frac{20(0,02s + 1)}{(0,05s^2 + 1)(0,01s + 1)}.$$

Годограф Найквиста задается функциями:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} W(j\omega) &= \frac{20(0,0002\omega^2 + 1)}{1 - 4 \cdot 10^{-2}\omega^2 - 5 \cdot 10^{-4}\omega^4}, \\ \operatorname{Im} W(j\omega) &= \frac{20\omega}{1 - 4 \cdot 10^{-2}\omega^2 - 5 \cdot 10^{-4}\omega^4}. \end{aligned}$$



Передаточная функция имеет пару мнимых полюсов  $\pm 20j$ , поэтому годограф Найквиста терпит разрыв на частоте  $20 \text{ с}^{-1}$ , уходит в бесконечность асимптотически как прямая с наклоном  $0,04$ . С тем же наклоном годограф возвращается из бесконечности и уходит в нуль.

После пополнения годографа дугой большого радиуса раствором  $-\pi$ , обнаруживаем, что контрольная точка не охвачена годографом. Следовательно, система после замыкания будет асимптотически устойчивой.

**3.** Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(s) = \frac{20(0,02s + 1)}{(0,05s^2 + 1)(0,1s + 1)}.$$

Будет ли асимптотически устойчивой система после замыкания.

Годограф Найквиста задан функциями:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} W(j\omega) &= \frac{20(0,002\omega^2 + 1)}{1 - 4 \cdot 10^{-2}\omega^2 - 5 \cdot 10^{-4}\omega^4}, \\ \operatorname{Im} W(j\omega) &= \frac{-1,6\omega}{1 - 4 \cdot 10^{-2}\omega^2 - 5 \cdot 10^{-4}\omega^4}. \end{aligned}$$

Передаточная функция имеет пару мнимых полюсов  $\pm 20j$ , поэтому годограф Найквиста терпит разрыв на частоте  $20 \text{ с}^{-1}$ , уходит в бесконечность асимптотически как прямая с наклоном  $-0,12$ . С тем же наклоном годограф возвращается из бесконечности и уходит в нуль.

После пополнения годографа дугой большого радиуса раствором  $-\pi$ , обнаруживаем, что контрольная точка охвачена годографом. Следовательно, система после замыкания будет неустойчивой.

**4.** На рис. 6.2, в приведены логарифмические частотные характеристики системы, разомкнутая часть которой имеет передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{100(0,05s + 1)}{(0,5s + 1)(0,01s + 1)}.$$

В разомкнутом состоянии система асимптотически устойчива, поскольку ее полюсы левые:  $-2$ ,  $-10$ . После замыкания полюсы системы останутся в левой полуплоскости и система, как показывает логарифмический критерий, будет асимптотически устойчивой.

**5.** Проверить свойство асимптотической устойчивости замкнутой системы управления, если ее разомкнутый контур содержит звено запаздывания  $\tau = 0,5 \text{ с}$ , и звено с передаточной функцией:

$$W_1(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}.$$

Передаточная функция разомкнутой части системы имеет вид

$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} e^{-0,5s}.$$

Для построения годографа Найквиста используем эйлерово представление экспоненты

$$\operatorname{Re} W(j\omega) = \frac{(\omega^2 - 1) \sin(0,5\omega) - 2 \cos(0,5\omega)}{(\omega^4 + 2\omega^2 + 1)\omega};$$

$$\operatorname{Im} W(j\omega) = \frac{(\omega^2 - 1) \cos(0,5\omega) + 2 \sin(0,5\omega)}{(\omega^4 + 2\omega^2 + 1)\omega}.$$

Вычислим несколько точек годографа Найквиста:

$\omega$ , рад	0,1	0,5	1,0	2,0	5,0	10,0
$\operatorname{Re} W(j\omega)$	-20,1	-2,7	-0,44	0,03	0,004	-0,0009
$\operatorname{Im} W(j\omega)$	-8,7	-0,3	-0,24	0,07	-0,005	0,0003

Найденные значения точек позволяют изобразить годограф достаточно точно, чтобы ответить на вопрос об устойчивости. Годограф Найквиста проходит левее контрольной точки, приближаясь спирально к началу координат. Дополненный дугой годограф охватывает контрольную точку. Система управления после замыкания окажется неустойчивой.

#### 6.4. АНАЛИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Математические модели автоматических систем, как правило, известны с точностью до значения некоторых параметров, что и объясняет ограниченную адекватность всякой модели. Причиной этой ограниченности является неизбежная неидеальность исходных расчетных схем, погрешность линеаризации и ограниченность предположения о стационарности параметров. Изучение влияния параметров модели системы на ее динамические свойства и, в частности на ее устойчивость, является одной из основных задач анализа систем управления.

Пусть система управления задана своей передаточной функцией  $W(s; \alpha, \beta, \dots, \gamma)$ , в которой параметры  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$  возможно изменяются.

Совокупность значений параметров  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$  можно рассматривать как координаты некоторой точки в *параметрическом пространстве*. Каждая точка в этом пространстве задает значения параметров модели системы, определяет ее характеристический многочлен, полностью определяет полюсы системы. Таким образом, в параметрическом пространстве можно выделить **область устойчивости** — множество точек, которым отвечает устойчивая система, область неустойчивости — совокупность значений параметров системы, при которых система неустойчива и, наконец, *границу области устойчивости*.

Степень близости параметрической точки к границе устойчивости характеризует **запас устойчивости**. О запасе устойчивости системы можно судить по расположению ее полюсов. Чем дальше они от мнимой оси тем большим запасом устойчивости система обладает.

Критерии устойчивости позволяют определить меру устойчивости. Например, по критерию Найквиста запас устойчивости оценивается двумя показателями: **запасом устойчивости по амплитуде** и **запасом устойчивости по фазе**.

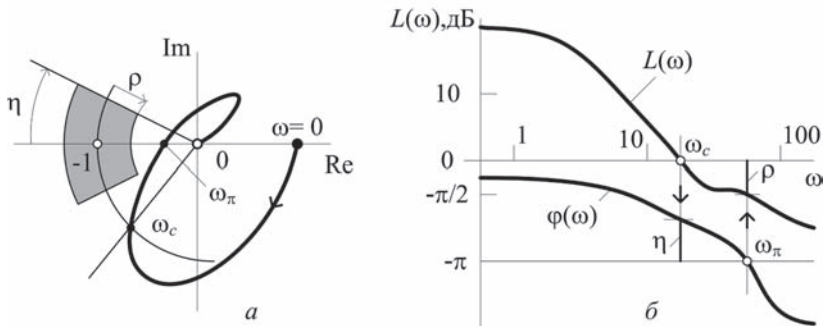


Рис. 6.3

Определение запасов устойчивости: а — по годографу Найквиста; б — по кривым Бode.

Будем говорить, что система обладает запасом устойчивости не менее чем  $(\rho, \eta)$ , если ее годограф Найквиста не имеет общих точек с кольцевой областью, показанной на рис. 6.3, а, и которая содержит контрольную точку  $(-1, 0)$ .

Запасы устойчивости  $(\rho, \eta)$  можно вычислить по логарифмическим частотным характеристикам, как показано на рис. 6.3, б:

$$\rho = -L(\omega_\pi), \quad \eta = 180 - \varphi(\omega_c),$$

где  $\omega_c$  — частота среза:  $L(\omega_c) = 0$ ;  $\omega_\pi$  — частота, при которой фазовая характеристика пересекает уровень  $-\pi$ :  $\varphi(\omega_\pi) = -180$  град.

Обычно минимально необходимые запасы устойчивости системы управления принимаются равными (6 дБ, 30 град).

Часто единственным варьируемым параметром системы является передаточный коэффициент ее разомкнутой части. Задача анализа состоит в том, чтобы определить **предельное значение передаточного коэффициента**  $k^*$  — значение, при котором система выходит на границу устойчивости.

Найти предельный коэффициент можно, используя, например, один из трех путей.

По частотному критерию устойчивости, когда годограф Найквиста проходит через точку  $(-1, 0)$ :  $W(\omega_c; k^*) = -1$ .

По алгебраическому критерию устойчивости, полагая равным нулю предпоследний гурвициан  $H_{n-1}(k^*) = 0$ .

По логарифмическому критерию устойчивости, полагая нулевыми запасы устойчивости по амплитуде и фазе  $\omega_\pi = \omega_c$ ,  $20 \lg k^* = L(1) - L(\omega_\pi)$ .

**Метод D-разбиения** — построения параметрической области устойчивости основан на двух фактах:

- корни характеристического уравнения непрерывно зависят от параметров системы;
- если точка лежит на границе параметрической области устойчивости, то хотя бы один характеристический корень лежит на мнимой оси.

Иначе говоря, предполагается справедливым утверждение:

*граница области устойчивости в пространстве параметров является конформным образом мнимой оси комплексной плоскости характеристических корней системы.*

Пусть характеристический полином замкнутой системы определен с точностью до одного параметра и пусть этот полином линеен относительно этого параметра:

$$\varphi(\lambda; \mu) = \mu N_1(\lambda) + N_2(\lambda).$$

Разрешив характеристическое уравнение относительно параметра и выполнив замену  $\lambda = j\omega$ , получим симметричную относительно оси абсцисс кривую:

$$\mu(j\omega) = -\frac{N_2(j\omega)}{N_1(j\omega)}, \quad (6.7)$$

которая является конформным образом мнимой оси комплексной плоскости корней системы.

Полученная кривая разбивает параметрическое пространство на области, пересечение которых с действительной осью, позволяют найти интервалы устойчивости. Выделить интервалы устойчивости можно используя, например, алгебраические критерии.

Действительные значения параметра  $\mu$  из области устойчивости составляют искомое множество допустимых значений параметра.

В том случае, когда характеристический полином зависит от двух параметров и зависимость эта линейная

$$A(\lambda; \mu, \nu) = \mu N(\lambda) + \nu M(\lambda) + L(\lambda), \quad (6.8)$$

после подстановки  $\lambda = j\omega$  следует выделить мнимую и действительную части этого выражения. В результате получим два алгебраических неоднородных уравнения:

$$\begin{aligned} \mu N_1(\omega) + \nu M_1(\omega) + L_1(\omega) &= 0, \\ \mu N_2(\omega) + \nu M_2(\omega) + L_2(\omega) &= 0, \end{aligned}$$

потому что

$$\begin{aligned} N(j\omega) &= N_1(\omega) + jN_2(\omega), \\ M(j\omega) &= M_1(\omega) + jM_2(\omega), \\ L(j\omega) &= L_1(\omega) + jL_2(\omega). \end{aligned}$$

Решение этих уравнений определяет в двухмерном параметрическом пространстве кривую, которая разбивает параметрическое пространство на области, среди которых можно найти и области устойчивости.

Выделить эти области устойчивости можно используя, например, алгебраические критерии. Для этого в исследуемой области произвольно выбирают представитель  $(\mu_0, \nu_0)$ , затем к полиному  $A(\lambda; \mu_0, \nu_0)$  следует применить, например, критерий Гурвица.

### Метод корневого годографа

Динамические свойства системы полностью определяются распределением корней характеристического уравнения на комплексной плоскости. Изменение значений параметров системы приводит к изменению местоположения ее характеристических корней.

Геометрическое место точек на комплексной плоскости, удовлетворяющих характеристическому уравнению системы при вариации какого-либо параметра, называют **корневым годографом системы**.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы зависит от одного свободно варьируемого параметра

$$W(s; \mu) = \frac{\mu B_m(s)}{A_n(s)}, \quad (6.9)$$

где  $A_n(s), B_m(s)$  — действительные полиномы степени  $n, m$  соответственно;  $\mu$  — варьируемый параметр.

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$A_n(s) + \mu B_m(s) = 0. \quad (6.10)$$

При  $\mu = 0$  это уравнение  $A_n(s) = 0$  определяет начальное положение траектории корней  $\{\pi_i, i = \overline{1, n}\}$ . При  $\mu \rightarrow \pm\infty$  характеристические корни системы удовлетворяют уравнению  $B_m(s) = 0$  и являются финальными точками траектории корней  $\{z_j, j = \overline{1, m}\}$ .

Укажем без доказательства свойства корневого годографа, которые позволяют построить качественную картину траекторий корней системы, для последующего количественного анализа свойств системы (R. Evans, К. Теодорчик, 1948):

- начальные точки годографа совпадают с полюсами разомкнутой системы, конечные точки — с нулями разомкнутой системы;

- при непрерывном изменении параметра от нуля до плюс бесконечности из каждой начальной точки  $\pi_i, i = \overline{1, n}$  выходит ветвь корневого годографа, которая является непрерывной кривой, из этих  $n$  траекторий  $m$  заканчиваются в  $z_j, j = \overline{1, m}$  финальных точках, остальные  $(n - m)$  ветвей годографа уходят в бесконечность.

Эти  $n$  траекторий образуют положительную часть корневого годографа. Аналогичным свойством обладает отрицательная часть корневого годографа, которая соответствует изменению параметра от нуля до минус бесконечности;

- $(n - m)$  ветвей годографа, которые уходят в бесконечность, асимптотически приближаются к лучам правильной  $2(n - m)$  лучевой звезды, центр которой находится на действительной оси в точке

$$\frac{1}{n - m} \left( \sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^m z_j \right); \quad (6.11)$$

- вещественная ось — это подмножество траекторий корневого годографа, причем в положительную часть годографа входят те точки действительной оси, правее которых имеется нечетное число нулей и полюсов;

• кратными точками годографа могут быть только те точки, которые одновременно удовлетворяют характеристическому уравнению и его производной. Кратные точки следует искать из соотношения

$$A(s) \frac{dB(s)}{ds} - \frac{dA(s)}{ds} B(s) = 0, \quad (6.12)$$

• корневой годограф симметричен относительно вещественной оси;  
 • значение параметра, соответствующее произвольной точке  $s^*$  годографа, определяют с точностью до знака из выражения

$$\mu(s^*) = \frac{\prod_{i=1}^n (s^* - \pi_i)}{\prod_{j=1}^m (s^* - z_j)}. \quad (6.13)$$

### Примеры:

**1.** Для системы, прямой тракт которой содержит три инерционных звена с передаточными функциями  $W_i(s) = \frac{k_i}{T_i s + 1}$ ,  $i = 1, 2, 3$  найти предельный коэффициент передачи, исходя из критерия Гурвица.

Характеристический полином замкнутой системы принимает вид

$$(T_1 \lambda + 1)(T_2 \lambda + 1)(T_3 \lambda + 1) + k_1 k_2 k_3.$$

Положим,  $a_0 = T_1 T_2 T_3$ ;  $a_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3$ ;

$$a_2 = T_1 + T_2 + T_3; \quad a_3 = 1 + k; \quad k = k_1 k_2 k_3.$$

Составив граничное условие устойчивости по Гурвицу, получим:

$$k^* = \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) (T_1 + T_2 + T_3) - 1.$$

Заметим, что если все три звена системы одинаковы, то предельный коэффициент передачи равен восьми.

**2.** Найти предельный коэффициент передачи для системы, логарифмические частотные характеристики которой представлены на рис. 6.3, б.

Поскольку запас по амплитуде этой системы равен 6 дБ, а величина  $L(1) = 20$  дБ, то предельный коэффициент передачи системы равен пяти.

**3.** Передаточная функция разомкнутой системы содержит один параметр:

$$W(s; \mu) = \frac{19}{(0,2s + 1)(0,5s + 1)(\mu s + 1)}.$$

Найти множество значений параметра, при которых замкнутая система будет асимптотически устойчивой.

Характеристическое уравнение замкнутой системы, разрешенное относительно параметра, имеет вид

$$\mu(0, 1\lambda^3 + 0, 7\lambda^2 + \lambda) + 0, 1\lambda^2 + 0, 7\lambda + 20 = 0,$$

откуда после подстановки  $\lambda = j\omega$ , получаем в явном виде функцию  $\mu = \mu(j\omega)$ , у которой:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mu(j\omega) &= \frac{13, 3}{0, 01\omega^4 + 0, 29\omega^2 + 1}, \\ \operatorname{Im} \mu(j\omega) &= \frac{0, 01\omega^4 - 1, 61\omega^2 + 20}{\omega(0, 01\omega^4 + 0, 29\omega^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Построенная кривая  $\mu = \mu(j\omega)$  показана на рис. 6.4, а. Кривая делит параметрическое действительное одномерное пространство на три интервала, один из которых  $[0, 0, 051)$  соответствует области асимптотической устойчивости.

Действительно, поскольку после подстановки в характеристическое уравнение системы значения параметра  $\mu_0 = 0, 05$  из этого интервала получим по критерию Гурвица достаточные условия устойчивости.

**4. Полиномом Вышнеградского** называют выражение:

$$V(p; \alpha, \beta) = p^3 + \alpha p^2 + \beta p + 1, \quad (6.14)$$

которое получают из характеристического многочлена третьего порядка

$$A(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

в результате замены  $p^3 = \frac{a_0}{a_3}\lambda^3$ .

Найти в пространстве параметров полинома Вышнеградского области асимптотической устойчивости.

Выполним в полиноме подстановку  $p = j\omega$ :

$$V(j\omega) = (-\alpha\omega^2 + 1) + j(\beta\omega - \omega^3).$$

На границе устойчивости  $\operatorname{Re} V(j\omega) = \operatorname{Im} V(j\omega) = 0$ , значит граница устойчивости определяется соотношениями  $\alpha\omega^2 = 1$ ,  $\beta = \omega^2$ . Откуда следует, что область параметрической устойчивости системы, для которой полином Вышнеградского является характеристическим, определяют неравенства:  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha\beta > 1$ .

Область устойчивости располагается в первом квадранте плоскости параметров, выше гиперболы  $\alpha\beta = 1$ .

5. Найти области асимптотической устойчивости системы, передаточная функция разомкнутой части которой зависит от двух настраиваемых параметров  $\mu, \tau$  :

$$W(s; \mu, \tau) = \frac{50(\tau s + 1)}{s(0,4s + 1)(\mu s + 1)}.$$

Чтобы найти области устойчивости составим характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$\varphi(\lambda; \mu, \tau) = \mu(0,4\lambda^3 + \lambda^2) + 50\tau\lambda + 0,4\lambda^2 + \lambda + 50 = 0.$$

Осуществив подстановку  $\lambda = j\omega$ , получим

$$\varphi(j\omega) = -\mu(0,4j\omega^3 + \omega^2) + 50\tau j\omega + j\omega + 50 - 0,4\omega^2 = 0.$$

Откуда следует пара уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varphi(j\omega) &= \mu\omega^2 + 0,4\omega^2 - 50 = 0, \\ \operatorname{Im} \varphi(j\omega) &= \mu 0,4\omega^3 - 50\tau\omega - \omega = 0. \end{aligned}$$

Определитель матрицы коэффициентов этой системы равен  $-50\omega^3$ , решив систему уравнений, получим уравнения параметрической кривой — границы области устойчивости:

$$\begin{aligned} \mu(\omega) &= 50\omega^{-2} - 0,4; \\ \tau(\omega) &= -0,0032\omega^2 - 0,02\omega + 0,4. \end{aligned}$$

Кроме того, границу области устойчивости составляет и прямая  $\mu(\omega) = 0$ . Эти линии, как показано на рис. 6.4, б, делят плоскость параметров на четыре области  $A, B, C, D$ , одна из которых оказалась искомой областью устойчивости. В чем можно убедиться, используя критерий Гурвица для каждой области.

Возьмем в качестве представителя области  $A$  точку  $\mu = \tau = 0,04$ , в этом случае характеристический полином системы принимает вид

$$0,016\lambda^3 + 0,44\lambda^2 + 3\lambda + 50.$$

Согласно критерию Гурвица,  $a_1a_2 - a_0a_3 = 0,52 > 0$ , следовательно, условия устойчивости выполняются. Система при этих значениях параметров асимптотически устойчива.

В области  $B$  выбираем, например, точку, где  $\mu = 0,08$ ,  $\tau = 0$ , в этом случае характеристический полином принимает вид

$$0,032\lambda^3 + 0,48\lambda^2 + \lambda + 50.$$

Согласно критерию Гурвица,  $a_1a_2 - a_0a_3 = -1,1 < 0$ , следовательно, условия устойчивости не выполняются, система при этих значениях параметров неустойчива. Аналогично поступаем с областями  $C, D$ , чтобы показать, что это области неустойчивости.



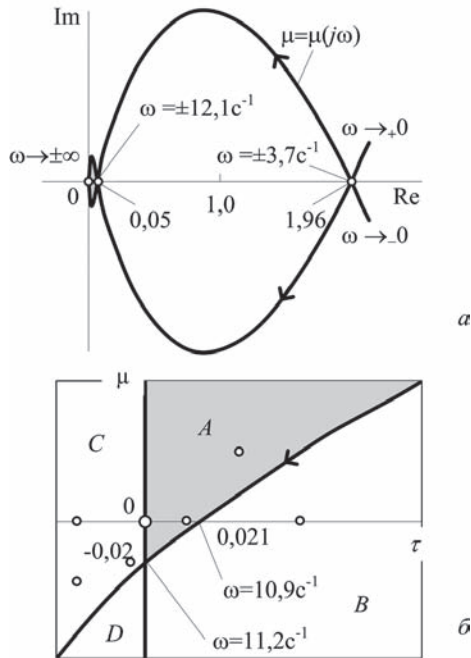


Рис. 6.4

Граница параметрических интервалов устойчивости системы (а).  
 Границы параметрических областей устойчивости системы (б).

6. Неустойчивая в разомкнутом состоянии система, имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{k}{2s^2 + s - 1},$$

ее полюсы  $\{\pi_i\} = \{-1; 0,5\}$ , нулей нет.

Корневой годограф замкнутой системы для  $k > 0$  имеет две ветви, заполняющие интервал  $[-1; 0,5]$  и уходящие асимптотически в бесконечность из кратной точки  $-0,5$ , как показано на рис. 6.5, б.

При малых значениях коэффициента передачи замкнутая система будет неустойчивой, однако, далее с ростом  $k$  система приобретает устойчивость. Действительно, для  $k = 2$  частотная характеристика разомкнутой части приобретает вид

$$W(j\omega) = \frac{2}{-(2\omega^2 + 1) + j\omega}.$$

Частотный годограф определяется выражениями:

$$\operatorname{Re} W(j\omega) = \frac{-(4\omega^2 + 2)}{4\omega^4 + 5\omega^2 + 1};$$

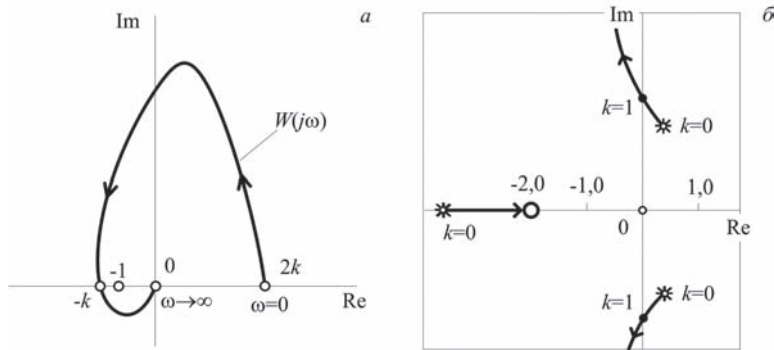


Рис. 6.5

Годограф Найквиста системы с переменным коэффициентом передачи регулятора (а), корневой годограф этой системы (б).

$$\operatorname{Im} W(j\omega) = \frac{-2\omega}{4\omega^4 + 5\omega^2 + 1}.$$

Годограф Найквиста, как видно из рис. 6.5, а охватывает контрольную точку в положительном направлении 0,5 раз. Поскольку у разомкнутой части системы один правый полюс, то согласно критерию устойчивости Найквиста замкнутая система будет асимптотически устойчивой.

7. Построить корневой годограф системы, передаточная функция разомкнутой части которой имеет вид

$$W(s; \mu) = \frac{\mu(s^2 + s + 20)}{s(s + 1)(s + 2)}.$$

Система имеет:  $n = 3$ ,  $m = 2$ ;  $\{\pi_i\} = \{0, -1, -2\}$ ,  $\{z_j\} = \{-0,5 \pm j4, 4\}$ .

Корневой годограф замкнутой системы имеет две ветви, уходящие в бесконечность по действительной оси. Кратные точки  $s = -0,42$  и  $s = -1,57$  для положительной и отрицательной части годографа соответственно получены из уравнений:

$$\begin{aligned} A(s) \frac{dB(s)}{ds} - \frac{dA(s)}{ds} B(s) &= 0; \\ A(s) &= s^3 + 3s^2 + 2s, \quad \frac{dA(s)}{ds} = 3s^2 + 6s + 2; \\ B(s) &= s^2 + s + 20, \quad \frac{dB(s)}{ds} = 2s + 1. \end{aligned}$$

При значениях параметра  $\mu = 0,41$  и  $\mu = 14,6$  траектория корней пересекает мнимую ось. Поэтому замкнутая система теряет устойчивость, когда параметр системы принимает значения на интервале  $(0,41; 14,6)$  и когда  $\mu < 0$ . Годограф системы представлен на рис. 6.7, а,б.

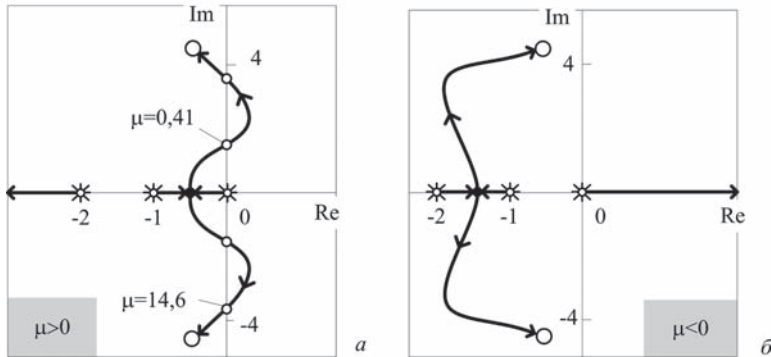


Рис. 6.6

Корневой годограф системы примера 7: а — положительный; б — отрицательный.

**8.** Построить корневой годограф системы, передаточная функция разомкнутой части которой имеет вид:

$$W(s; \mu) = \frac{\mu(s+1)}{s(s+2)(s+4)(s^2+4s+5)}.$$

Система имеет:  $n = 5$ ,  $m = 1$ ;  $\{\pi_i\} = \{0, -2, -4, -2 \pm j\}$ ,  $\{z_j\} = \{-1\}$ .

Корневой годограф замкнутой системы (см. рис. 6.7 а, б) имеет 8 асимптот, которые образуют правильную звезду с центром в точке  $-2,25$ , поскольку

$$\sum_i \pi_i = -10, \quad \sum_j z_j = -1.$$

У положительного корневого годографа имеется одна кратная точка  $-3,36$  на действительной оси, которая удовлетворяет уравнению

$$A(s) \frac{dB(s)}{ds} - \frac{dA(s)}{ds} B(s) = -4s^5 - 35s^4 - 114s^3 - 173s^2 - 124s - 40 = 0.$$

Это уравнение имеет пять корней, из которых только один действительный.

**9.** На рис. 6.8 показан корневой годограф системы с характеристическим уравнением:

$$(s+1)^4 + \mu(s-2) = 0.$$

Для этой системы:

$$n = 4, m = 1; \{\pi_i\} = \{-1, -1, -1, -1\}, \{z_j\} = \{2\}.$$

Корневой годограф системы имеет 6 асимптот, которые образуют правильную звезду с центром в точке  $-2$ . Действительные кратные корни удовлетворяют уравнению:

$$(s+1)^4 - 4(s+1)^3(s-2) = 0$$

и равны  $-1$ ,  $-1,3$ .

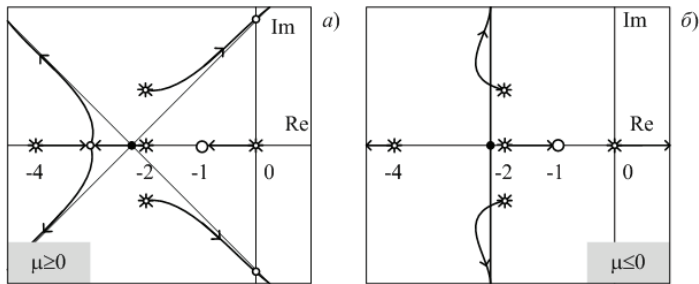


Рис. 6.7

Корневой годограф системы примера 8: а — положительный; б — отрицательный

Из рис. 6.8, а, б видно, что если параметр  $t$  изменяется в интервале  $(-1, 3; -1, 3)$ , то система будет асимптотически устойчивой.

**10.** Построить корневой годограф замкнутой системы по ее характеристическому полиному.

$$s^3(s + 30)(s + 45) + k(s + 5)(s + 15).$$

По характеристическому полиному системы можно заключить, что начальное положение ее пяти полюсов составляет множество:

$$\{\pi_{1,2,3} = 0, \pi_4 = -30, \pi_5 = -45\},$$

а финальное  $\{z_1 = -5, z_2 = -15\}$ .

Из пяти корней два переместятся в финальное положение, а три уйдут в бесконечность асимптотически приближаясь к лучам шестилучевой звезды с центром в точке  $-18,3$  на действительной оси. Действительные кратные корни удовлетворяют уравнению:

$$3s^4 + 230s^3 + 6225s^2 + 76500s + 303750 = 0$$

и равны  $-7, 1; -37, 6$ .

На рис. 6.8, в сплошными линиями показан корневой годограф при изменении параметра от  $-\infty$  до  $0$ , а пунктирными при изменении параметра от  $0$  до  $\infty$ .

## 6.5. УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Дать суждение об устойчивости системы, заданной матрицей состояния:

- $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0,3 \end{pmatrix}$ ;
- $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ;
- $\begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ;
- $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

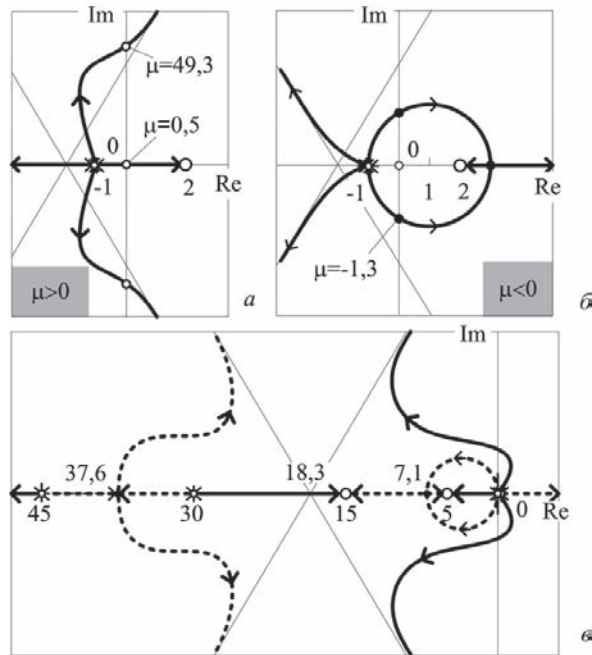


Рис. 6.8

Корневой годограф системы примера 9: а — положительный; б — отрицательный;  
в — корневой годограф системы примера 10

2. Используя критерий Гурвица, определить условия устойчивости для системы, заданной характеристическим полиномом:

- $\lambda^3 + 3,5(\lambda + 1)\lambda + 1;$
- $(T_1\lambda + 1)(T_2^2\lambda^2 + 2\zeta T\lambda + 1) + k;$
- $\lambda^4 + \alpha\lambda^3 + 2\lambda + \beta\lambda + 1.$

3. Построить таблицу Рауса и проверить по характеристическому многочлену системы ее устойчивость:

- $0,01\lambda^3 + 0,08\lambda^2 + 0,2\lambda + 1;$
- $0,02\lambda^4 + 45\lambda^2 + 100.$

4. Используя матричный критерий Зубова, проверить устойчивость системы, заданной матрицей состояния:

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 3,1 & -0,2 \\ -0,4 & -2,5 & 3,2 \\ 1,1 & -1,5 & -3,1 \end{pmatrix}.$$

5. Построить годограф Михайлова и дать суждение об устойчивости системы, для которой известен характеристический полином:

$$0,002\lambda^5 + 0,234\lambda^4 + 3,76\lambda^3 + 19,6\lambda^2 + 36\lambda + 140.$$

6. Исследовать на устойчивость системы, оценить запас устойчивости для каждого варианта, если в разомкнутом состоянии передаточная функция системы имеет вид:

- $\frac{120}{s^2(10s + 1)(0,05s + 1)(0,03s + 1)}$ ;
- $\frac{8(0,1s + 1)}{(0,15s + 1)(0,05s + 1)}$ ;
- $\frac{12,5(0,2s + 1)}{(0,04s^2 + 1)(s + 1)}$ ;
- $\frac{2000}{0,01s^4 + 1,2s^3 + 25s^2 + 40s - 1,05}$ .

7. Найти предельный коэффициент передачи в системе, прямой тракт которой состоит из четырех инерционных звеньев.

8. Построить параметрическую область устойчивости для системы с известным характеристическим полиномом:

- $A(\lambda; \mu) = \lambda(0,4\lambda + 1)(0,15\lambda + 1) + 50(\mu\lambda + 1)$ ;
- $A(\lambda; \mu, \nu) = \lambda(0,2\lambda + 1)(\nu\lambda + 1) + 100(\mu\lambda + 1)$ ;
- $A(\lambda; \mu, \nu) = \lambda^3 + \mu\lambda^2 + 11\lambda + \nu$ .

9. Построить корневой годограф и дать суждение об устойчивости системы, заданной характеристическим полиномом:

- $A(\lambda; \mu) = \lambda(\lambda + 1) + \mu$ ;
- $A(\lambda; \mu) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) + \mu$ ;
- $A(\lambda; \mu) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda^2 - 12) + \mu\lambda^2$ ;
- $A(\lambda; \mu, \nu) = (\lambda + 8)(\lambda^2 + 2\mu\lambda + 50) + \nu, \quad \mu \in \{0, 2\}$ .

10. Система содержит в прямом тракте помимо линейного звена с передаточной функцией  $W(s)$  звено запаздывания. Найти частотные характеристики разомкнутой системы, построить частотный годограф разомкнутой системы. Применить критерий Найквиста или логарифмический критерий для оценки устойчивости такой системы.

Рассмотреть случай

$$W(s; k) = \frac{k}{0,2s + 1},$$

запаздывание 0,02 с. Определить предельный коэффициент передачи.

# АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ В НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

- Динамические процессы и ошибки в системах управления
- Оценка качества переходных процессов
- Стохастические методы анализа качества процессов управления
- Машинные методы анализа качества процессов управления
- Упражнения

## 7.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ОШИБКИ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Динамический процесс в линейной системе управления

$$\Sigma^{(n)}: \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

возникает как реакция на начальное отклонение  $\mathbf{x}(0)$  от равновесного состояния или как реакция на входное воздействие  $\mathbf{u}(t)$ . В общем случае, эти причины могут действовать совместно, порождая собственную и вынужденную составляющие динамического процесса

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Если на покоящуюся систему со скалярным входом и выходом действует только задающее воздействие  $u(t)$ , то *переходный процесс* в системе определяет выражение

$$y(t) = \int_0^t k(\tau)u(t-\tau)d\tau,$$

где  $k(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$  — импульсная функция системы.

Если момент приложения задающего воздействия достаточно далеко удален от текущего момента времени, то в системе можно считать, что переходные процессы закончились и имеет место *установившийся, вынужденный динамический процесс*:

$$y^*(t) = \int_0^{\infty} k(\tau)u(t-\tau)d\tau.$$

В этом же смысле можно говорить об ошибке обработки задающего воздействия и **установившейся ошибке** обработки задания

$$e(t) = u(t) - y(t), \quad e^*(t) = u(t) - y^*(t).$$

Предположим, что входное воздействие  $u(t)$  допускает в каждой текущей точке  $t$  разложение в ряд Тейлора:

$$u(t - \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{d^m u(t)}{dt^m} \frac{\tau^m}{m!}, \quad (7.1)$$

в этом случае установившейся процесс принимает вид

$$y^*(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^{(m)}(t)}{m!} (-1)^m \int_0^{\infty} \tau^m k(\tau) d\tau. \quad (7.2)$$

Выражения

$$(-1)^m \int_0^{\infty} \tau^m k(\tau) d\tau = \mu_m, \quad m = 0, 1, \dots \quad (7.3)$$

называют *моментами порядка  $m$  импульсной переходной характеристики*.

Эти величины, вычисляемые заранее по импульсной характеристике, позволяют найти установившейся процесс как функцию от входного сигнала и его производных

$$y^*(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m \frac{u^{(m)}(t)}{m!}. \quad (7.4)$$

Моменты импульсной функции могут быть найдены по передаточной функции. В самом деле, ведь

$$H(s) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-st} dt,$$

поэтому производная от  $H(s)$  по  $s$  при  $s \rightarrow 0$  совпадает с  $\mu_0$  — нулевым моментом в силу непрерывности функции  $H(s)$  в нуле. Нетрудно увидеть, что и  $m$ -я производная от  $H(s)$  по  $s$  при  $s \rightarrow 0$  совпадает с  $\mu_m$  в силу непрерывности в нуле функции  $H(s)$  и всех ее производных:

$$\mu_m = \left. \frac{d^m}{ds^m} H(s) \right|_{s=0}. \quad (7.5)$$

С другой стороны, если разложить функцию  $H(s)$  в ряд Тейлора в окрестности  $s = 0$ , обнаружим, что моменты импульсной функции  $\mu_m$  — коэффициенты при степенях  $s$  этого разложения

$$H(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \left. \frac{d^m}{ds^m} H(s) \right|_{s=0} \frac{s^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m \frac{s^m}{m!}. \quad (7.6)$$



Это представление используют алгоритм для отыскания моментов импульсной функции, а с ними установившийся процесс и установившуюся ошибку отработки входного воздействия

$$\begin{aligned} e^*(t) &= u(t) - y^*(t) = u(t) - \left( u(t)\mu_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \frac{u^{(m)}(t)}{m!} \right) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{u^{(m)}(t)}{m!}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

В этом выражении

$$c_0 = 1 - \mu_0, \quad c_m = -\mu_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.8)$$

называют **коэффициентами ошибки**.

Эти коэффициенты можно найти прямо, используя понятие передаточной функции системы по ошибке

$$\begin{aligned} H_e(s) &= 1 - H(s); \\ c_m &= \left. \frac{d^m}{ds^m} H_e(s) \right|_{s=0}, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.9)$$

Коэффициенты ошибки, которые зависят от структуры и параметров системы, позволяют оценить не только величину возможной ошибки отработки входного воздействия, но и наметить пути ее уменьшения.

Пусть входное воздействие на систему является в общем случае полиномиальным сигналом

$$u(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1}, \quad t \geq 0$$

и пусть первоначально это ступенчатый сигнал  $u(t) = \alpha_0, \quad t \geq 0$ . Тогда установившаяся ошибка отработки этого сигнала  $e^*(t) = c_0 \alpha_0$  оказывается величиной постоянной.

Называют такую ошибку *статической*. Эта ошибка пропорциональна значению входного ступенчатого воздействия, причем  $c_0 = H_e(0)$ .

Для автоматической системы канонической структуры (см. рис. 2.11)

$$H_e(s) = \frac{1}{1 + W_0(s)W_1(s)},$$

где  $W_0(s), \quad W_1(s)$  — дробно-рациональные выражения вида

$$W(s) = \frac{k(1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m)}{1 + a_1 s^2 + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n},$$

с коэффициентами передачи  $k_0, k_1$  соответственно, статическая ошибка пропорциональна величине  $\frac{1}{1 + k_0 k_1}$ . Ошибка может быть уменьшена только путем увеличения коэффициента передачи регулятора  $k_1$ .

Системы, для которых статическая ошибка не равна нулю, называют **статическими**.

Другой путь устранения статической ошибки — это изменение структуры системы, введение в регулятор интегрирующей составляющей. Действительно, если передаточная функция регулятора имеет вид

$$W_1(s) = \frac{k_1(1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m)}{s(1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^{n-1})},$$

то уже в этом случае  $c_0 = 0$ .

Системы, для которых статическая ошибка равна нулю, называют **астатическими**.

Для безошибочного воспроизведения входного сигнала общего полиномиального вида

$$u(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha^{r-1} t^{r-1}, \quad t \geq 0$$

система должна иметь  $c_0 = c_1 = \dots = c_{r-1} = 0$ .

О таких системах говорят, что они обладают *астатизмом порядка  $r$* .

Астатизм порядка  $r$  может быть достигнут, когда в системе управляющее устройство вместе с объектом в прямом тракте имеет не менее  $r$  интегрирующих звеньев. Передаточная функция по ошибке таких систем имеет не менее  $r$  нулей в начале координат.

Система с астатизмом первого порядка безошибочно воспроизводит ступенчатый сигнал любого уровня, но линейно растущий сигнал обрабатывает с ошибкой. Система с астатизмом второго порядка безошибочно воспроизводит не только ступенчатый сигнал, но линейный сигнал любого темпа.

Понятие астатизма системы может быть применено не только к задающему воздействию, но и к возмущающему. Одна и та же система может быть астатической по управляющему сигналу и статической по возмущающему.

Следящие системы должны быть *астатическими по отношению к задающему воздействию*, а системы стабилизации — *астатическими по отношению к возмущающему воздействию*.

### Примеры:

1. Для системы с передаточной функцией прямого тракта  $W(s)$  и единичной отрицательной обратной связью, найти установившуюся ошибку при обработке:

- единичного ступенчатого сигнала;
- единичного линейного сигнала.

Преобразование Лапласа ошибки обработки входного сигнала  $u(t)$  представлено выражением

$$E(s) = H_e(s)U(s) = \left(1 - \frac{W(s)}{1 + W(s)}\right)U(s). \quad (7.10)$$

Значение установившейся ошибки определяют из предельного соотношения

$$e^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s), \quad (7.11)$$

поэтому установившаяся ошибка обработки единичного ступенчатого сигнала

$$e^* = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{1}{1 + W(0)} \quad (7.12)$$

и установившаяся ошибка обработки единичного линейного сигнала

$$e^* = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(1 + W(s))}. \quad (7.13)$$

**2.** В системе канонической структуры (см. рис. 2.11) объект испытывает единичное ступенчатое возмущение. Определить установившуюся составляющую ошибки воспроизведения системой входного сигнала, вызванной возмущающим воздействием.

Уравнение ошибки в преобразованном по Лапласу виде представляет соотношение

$$E(s) = H_{eu}(s)U(s) + H_{ef}(s)F(s).$$

Составляющая ошибки от возмущения  $E_f(s) = H_{ef}(s)F(s)$ , поэтому установившееся значение этой составляющей

$$e^* = \lim_{s \rightarrow 0} sH_{ef}(s)F(s). \quad (7.14)$$

Для системы с канонической структурой

$$H_{ef}(s) = -\frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)W_1(s)}.$$

Поэтому искомое значение составляющей установившейся ошибки от единичного ступенчатого возмущения, когда  $F(s) = \frac{1}{s}$ , определяет выражение

$$e^* = -\frac{W_0(0)}{1 + W_0(0)W_1(0)}. \quad (7.15)$$

**3.** Вычислить коэффициенты ошибок для системы канонической структуры, у которой:

$$W_1(s) = \frac{k_1(T_1s + 1)}{T_2s + 1}, \quad W_0(s) = \frac{k_0}{s(1 + T_0s)}.$$

Передаточная функция ошибки воспроизведения задающего сигнала для этой замкнутой системы имеет вид:

$$H_e(s) = \frac{s(1 + T_0s)(1 + T_2s)}{s(1 + T_0s)(1 + T_2s) + k_0k_1(1 + T_1s)},$$

или в раскрытом виде

$$H_e(s) = \frac{T_0T_2s^3 + (T_0 + T_2)s^2 + s}{T_0T_2s^3 + (T_0 + T_2)s^2 + s(1 + k_0k_1T_1) + k_0k_1}.$$

С другой стороны,  $H_e(s) = c_0 + c_1s + c_2 \frac{s^2}{2!} + \dots$ , поэтому образуем равенство

$$T_0T_2s^3 + (T_0 + T_2)s^2 + s = (T_0T_2s^3 + (T_0 + T_2)s^2 + (1 + k_0k_1T_1)s + k_0k_1) \times \\ \times (c_0 + c_1s + 0,5c_2s^2 + \dots),$$

которое позволит, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов, получить уравнения для искоемых коэффициентов ошибки:

$$\begin{aligned} 1: \quad & 0 = k_0k_1c_0; \\ s: \quad & 1 = (1 + k_0k_1T_1)c_0 + k_0k_1c_1; \\ s^2: \quad & 1 = T_0 + T_2 = (T_0 + T_2)c_0 + (1 + k_0k_1T_1)c_1 + 0,5k_0k_1c_2 \dots \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим

$$c_0 = 0; \quad c_1 = \frac{1}{k_0k_1}; \quad c_2 = 2 \frac{(T_0 + T_2 - T_1)k_0k_1 - 1}{k_0^2k_1^2}; \dots$$

4. Определить динамическую точность воспроизведения входного линейного сигнала  $u(t) = 10 - 3t$ , в примере 3, если:  $k_0 = 125$ ,  $k_1 = 1$ , 2.

Ошибка воспроизведения линейного сигнала определяет выражение

$$e^*(t) = (10 - 3t)c_0 - 3c_1 = -0,02c^{-1}.$$

5. Найти для системы со структурой, представленной на рис. 2.20, в, условия безошибочного воспроизведения линейного сигнала, для которой

$$W_0(s) = \frac{k_0}{s(T_0s + 1)}, \quad W_1(s) = \frac{k_1}{T_1s + 1}, \quad W_2(s) = k_2s.$$

Передачная функция замкнутой системы имеет вид:

$$H(s) = \frac{W_1(s) + W_2(s)}{1 + W_0(s)W_1(s)} W_0(s),$$

но тогда передачная функция замкнутой системы по ошибке

$$H_e(s) = \frac{1 - W_0(s)W_2(s)}{1 + W_0(s)W_1(s)}.$$

Выполнив тождественные преобразования, получим соотношение

$$\begin{aligned} T_0T_1s^3 + (T_0 + T_1 - k_0k_2T_1)s^2 + (1 - k_0k_2)s = \\ = (T_0T_1s^3 + (T_0 + T_1)s^2 + s + k_0k_1)(c_0 + c_1s + \dots), \end{aligned}$$

откуда, искомые выражения для коэффициентов ошибки:

$$0 = k_0k_1c_0, \quad 1 - k_0k_2 = c_0 + k_0k_1c_1.$$

Итак, если  $k_2 = \frac{1}{k_0}$ , то помимо  $c_0$  оказывается равно нулю и  $c_1$ , что позволяет системе воспроизводит линейный входной сигнал без установившейся ошибки.

## 7.2. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Для прямой оценки качества системы управления используют кривую переходного процесса  $h(t)$ , которую, как видно из рис. 7.1, характеризуют несколько числовых показателей:

- установившееся значение переходного процесса

$$h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t); \quad (7.16)$$

- максимальное значение процесса

$$h_{\max} = \max_t h(t);$$

- перерегулирование, %

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h(\infty)}{h(\infty)} 100; \quad (7.17)$$

- время регулирования или время переходного процесса  $t_p$ , отсчитываемое от момента приложения воздействия до момента, когда

$$\forall t \geq t_p, \quad |h(t) - h(\infty)| \leq \Delta,$$

где  $\Delta$  — некоторая величина, характеризующая заданную точность;

- число перерегулирований  $\nu$  в интервале  $[0, t_p]$ ;
- момент  $t_1$  первого достижения уровня задания;
- время достижения  $t_m$  первого максимума.

Кривую переходного процесса  $h(t)$  можно получить либо прямым путем, решая аналитически, или численными методами уравнения модели системы, либо косвенно, используя частотные и временные характеристики системы, путем построения некоторой ее аппроксимации.

Алгоритмическим основанием для приближенного построения кривой переходного процесса является соотношение

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega, \quad (7.18)$$

которое получают интегрированием по времени импульсной характеристики системы.

Импульсную временную характеристику определяют через частотную характеристику системы:

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (7.19)$$

Если  $H(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ , то, используя представление Эйлера для  $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ , и то, что функция  $H(j\omega)$ ,  $\omega \in (-\infty, \infty)$  симметрична относительно действительной оси, получим

$$k(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (P(\omega) \cos(\omega t) - Q(\omega) \sin(\omega t)) d\omega.$$

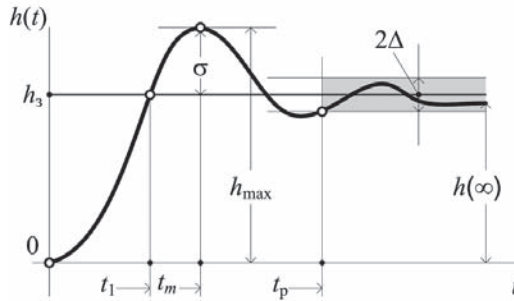


Рис. 7.1  
Кривая переходного процесса

Импульсная функция по определению равна нулю для  $t < 0$ , поэтому справедливо, что

$$k(-t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (P(\omega) \cos(\omega t) + Q(\omega) \sin(\omega t)) d\omega = 0.$$

Сложив два этих результата, получим

$$k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos(\omega t) d\omega, \tag{7.20}$$

откуда интегрированием по времени импульсной характеристики получают искомое соотношение для построения приближенного переходного процесса

Методы приближенного построения переходного процесса путем аппроксимации вещественной частотной характеристики можно найти в различных справочниках.

Сравнение систем по качеству процессов управления можно осуществить не только путем прямого вычисления показателей качества, но и косвенно, вычислением так называемых **интегральных оценок**. Эти числовые оценки позволяют выявить не только лучший в том или ином смысле переходный процесс, но и определять те значения параметров системы, при которых имеет место *лучшее* качество процессов.

Используя интегральную оценку как *критерий оптимальности*, можно поставить экстремальную задачу отыскания наилучшего в смысле данного критерия процесса: *найти, варьируя параметрами системы, такой переходный процесс, чтобы интегральная оценка приняла наименьшее значение среди возможных*.

Интегральная оценка формально характеризует меру близости процесса к наилучшему — *экстремальному переходному процессу*.

Обычно интегральные оценки имеют вид квадратичного функционала от  $e(t) = u(t) - y(t)$  — ошибки обработки входного воздействия и ее производных по времени:

$$J_0 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt;$$

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_0^{\infty} (e^2(t) + \tau_1^2 \dot{e}^2(t)) dt; \\
 &\dots \\
 J_m &= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^m \tau_k^2 (e^{(k)}(t))^2 dt.
 \end{aligned}
 \tag{7.21}$$

Наилучшим по оценке  $J_0$  будет такой переходный процесс, для которого  $e^*(0) = e(0)$ ,  $e^*(t) \equiv 0$ ,  $t > 0$ .

Очевидно, это идеальный, недостижимый процесс. Процесс лучший в смысле  $J_0$  может иметь малые отклонения, но допускает большие значения производных отклонения.

Наилучшим по оценке  $J_1$  будет такой переходный процесс, для которого

$$e(t) + \tau \dot{e}(t) = 0, \quad t > 0,$$

что следует из задачи минимизации  $J_1(e(t))$ . Этот процесс является уже монотонным и достаточно гладким  $e^*(t) = e(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

Вычисление интегральной квадратичной оценки  $J_0$  основано на *соотношении Парсеваля*

$$\int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |E(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} E(j\omega)E(-j\omega) d\omega, \tag{7.22}$$

где  $E(j\omega) = E(s) \Big|_{s=j\omega}$  — преобразование Фурье функции  $e(t)$ .

Если функция  $E(s)$  имеет дробно-рациональное представление

$$E(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n},$$

то для нее формула Парсеваля может быть вычислена аналитически.

Для случая  $m = n - 1$  значения  $J_0$  табулированы *Мак-Ленном*<sup>1</sup>.

Представим фрагмент этой таблицы:

$$\begin{aligned}
 n = 1, \quad J_0 &= \frac{b_0}{2a_0 a_1}; \\
 n = 2, \quad J_0 &= \frac{b_0^2 a_2 + b_1^2 a_0}{2a_0 a_1 a_2}; \\
 n = 3, \quad J_0 &= \frac{b_0^2 a_2 a_3 + b_1^2 a_0 a_3 + b_2^2 a_0 a_1 - 2b_0 b_2 a_0 a_3}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)}.
 \end{aligned}
 \tag{7.23}$$

<sup>1</sup> Топчев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования: учеб. пособие для вузов. — М.: Машиностроение, 1989.

Интегральная оценка  $J_1$  находится так же, как и  $J_0$ . В самом деле, в силу определения

$$J_1 = \int_0^{\infty} e^2(t)dt + \tau^2 \int_0^{\infty} \dot{e}^2(t)dt,$$

поэтому, чтобы вычислить  $J_1$ , надо найти два интеграла  $J_0$  от ошибки и от производной ошибки

$$J_1 = J_0(e) + \tau^2 J_0(\dot{e}).$$

Интеграл от квадрата производной ошибки вычисляется по той же схеме: находим преобразование Лапласа производной ошибки

$$E^*(s) = sE(s) - e(0),$$

а затем в силу соотношения Парсеваля находим и саму оценку  $J_0(\dot{e})$ .

$$J_0(\dot{e}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E^*(j\omega)E^*(-j\omega)d\omega, \quad E^*(j\omega) = E^*(s) \Big|_{s=j\omega}.$$

Качество переходного процесса можно приближенно оценить по расположению на комплексной плоскости полюсов системы и ее частотным характеристикам. Известны некоторые числовые оценки показателей переходного процесса.

*Время регулирования* в основном определяется полюсами — ближайшими к мнимой оси, их называют **доминирующими**.

При  $\Delta = 0,05$  и  $\Delta = 0,02$  время регулирования оценивается неравенствами

$$t_p \leq \frac{3}{\eta}, \quad t_p \leq \frac{5}{\eta},$$

где  $\eta$  — модуль вещественной части доминирующих корней.

*Перерегулирование* оценивают неравенством, %  $\sigma \leq \exp(-\pi \operatorname{ctg} \beta)100$ , где  $\beta$  — полураствор сектора, который включает весь спектр полюсов системы.

*Время первого достижения* и *время достижения первого максимума*, которые характеризуют быстрдействие системы, оценивают неравенствами:

$$t_1 > \frac{(1,5 \div 2,0)}{\omega_c}; \quad t_m \geq \frac{\pi}{\omega_c},$$

где  $\omega_c$  — частота среза логарифмической амплитудной частотной характеристики разомкнутой части системы.

### Примеры:

1. Для системы с передаточной функцией разомкнутой части

$$W(s) = \frac{k}{s(0,1s+1)(0,05s+1)}$$



сравнить по критерию  $J_0$  два варианта переходного процесса для  $k = 3, 2$  и  $k = 15, 0$ . Найти значение коэффициента передачи для формирования наилучшего в смысле  $J_0$  переходного процесса.

Найдем передаточную функцию по ошибке замкнутой системы

$$H_e(s) = \frac{s(0,1s+1)(0,05s+1)}{s(0,1s+1)(0,05s+1)+k},$$

затем определяем изображение ошибки по Лапласу

$$E(s) = \frac{0,005s^2 + 0,15s + 1}{0,005s^3 + 0,15s^2 + s + k}.$$

Это выражение дробно-рациональное, здесь  $n = 3$ ,  $m = 2$ .

Условия Мак-Ленна выполняются, поэтому находим аналитическое представление для интегральной оценки как функции коэффициента передачи

$$J_0(k) = \frac{1,75(8,57+k)}{30k-k^2}.$$

Для первого варианта  $J_0(3,2) = 0,240$ , для второго  $J_0(15,0) = 0,183$ . Второй вариант предпочтительнее, однако наилучший переходный процесс будет тогда, когда  $J_0(k)$  достигнет минимума по  $k$ .

Найдем экстремальное значение интегральной оценки и то значение  $k$ , при котором это значение достигается. Из необходимого условия минимума следует, что искомое  $k^*$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dk} J_0(k) = k^2 + 17,14k - 257,1 = 0.$$

Откуда находим, что  $k^* = 9,61$ , а  $J_0(k^*) = 0,162$ .

**2.** Для системы с передаточной функцией  $H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$  найти значение параметра  $\zeta > 0$ , которое обеспечивает наилучшее в смысле  $J_1$  качество переходного процесса

$$J_1 = \int_0^{\infty} (e^2(t) + \dot{e}(t)^2) dt.$$

Найдем преобразование Лапласа ошибки и ее производной

$$E(s) = (1 - H(s)) \frac{1}{s} = \frac{s + 2\zeta}{s^2 + 2\zeta s + 1},$$

$$E^*(s) = (1 - H(s)) - e(0) = -H(s) = -\frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}.$$

Величина  $J_1 = J_0(e) + J_1(\dot{e})$ . Найдем сначала интегральную оценку  $J_0(e)$ . Для дробно-рационального выражения

$$E(s) : n = 2, b_0 = 2, b_1 = 1, a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 1,$$

поэтому  $J_0(e; \zeta) = \frac{0,25}{\zeta}(1 + 4\zeta^2)$ .

Для дробно-рационального выражения

$$E^*(s) : n = 2, b_0 = -1, b_1 = 0, a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 1,$$

поэтому  $J_0(\dot{e}; \zeta) = \frac{0,25}{\zeta}$ . Таким образом,  $J_1(\zeta) = \frac{0,25}{\zeta}(2 + 4\zeta^2)$ .

Значение параметра, при котором обеспечивается наилучший в смысле  $J_1$  переходный процесс, находим из необходимого условия минимума этой функции

$$\frac{d}{d\zeta} J_1(\zeta) = 1 - \frac{0,5}{\zeta^2} = 0.$$

Откуда определяем, что  $\zeta^* = 0,707$ .

**3.** Для замкнутой системы с передаточной функцией

$$H(s) = \frac{0,8153 \cdot 10^6}{s^2 + 361,2s + 0,8153 \cdot 10^6},$$

используя аналитические и программные средства, найти переходную характеристику и показатели качества регулирования.

Определим реакцию на единичный линейно растущий сигнал. Переходная характеристика имеет вид

$$h(t) = 1 - e^{-180,6t} \cos 884,7t - 0,204e^{-180,6t} \sin 884,7t,$$

полюсы системы расположены в левой полуплоскости и равны

$$\lambda_{1,2} = -180,6 \pm j884,7.$$

Переходный процесс имеет при  $t = 3,69 \cdot 10^{-3}$ с, перерегулирование  $\sigma = 52,2\%$ , время регулирования для достижения 95% задания составляет 0,015с.

Передаточная функция разомкнутой части системы имеет вид

$$W(s) = \frac{0,8153 \cdot 10^6}{s(s + 361,2)},$$

система является астатической первого порядка, поэтому установившаяся ошибка отработки единичного сигнала будет равна нулю.

Реакцию системы на входной линейный единичный сигнал следует находить аналитически с использованием преобразования Лапласа

$$h(t) = t - 0,443 \cdot 10^{-3}(1 - e^{-180,6t} \cos 884,7t) - 0,104 \cdot 10^{-3}e^{-180,6t} \sin 884,7t.$$

Установившаяся ошибка отработки единичного линейного сигнала будет равна

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1 - H(s)}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s + 361,2}{s(s + 361,2) + 0,8153 \cdot 10^6} = 0,44 \cdot 10^{-3}.$$

4. В условиях предыдущей задачи, но с более полной моделью системы

$$H(s) = \frac{2,718k}{s^3 + 3408,3s^2 + 1,204 \cdot 10^6 s + 2,718k}, \quad k = 10^9,$$

определить аналитическими и программными средствами показатели качества переходного процесса. Сравним их с полученными ранее, для чего построим корневой годограф при изменении  $k$ .

Характеристический полином замкнутой системы

$$\lambda^3 + 3408,3\lambda^2 + 1,204 \cdot 10^6 \lambda + 2,718k,$$

при  $k = 10^9$  имеет два комплексных корня  $\lambda_{1,2} = -57,5 \pm j906,6$  и один действительный  $\lambda_3 = -3293,3$ .

Комплексные корни оказываются доминирующими, поскольку находятся ближе к мнимой оси. Переходная характеристика системы достаточно близка к характеристике модели второго порядка.

Корневой годограф системы при изменении параметра  $k \geq 0$  начинается из трех действительных полюсов:  $\pi_1 = 0$ ;  $\pi_2 = -400,3$ ;  $\pi_3 = -3008$ . С ростом параметра  $k$  два полюса  $\pi_1$  и  $\pi_2$  двигаются по действительной оси навстречу друг другу, а затем в точке  $-193$  превращаются в комплексно-сопряженную пару и удаляются в бесконечность вдоль двух лучей правильной шестилучевой звезды.

Действительный корень  $\pi_3$  движется в бесконечность по отрицательной действительной полуоси. При  $k = 10^9$  траектории корней проходят через точки  $-57,5 \pm j906,6$  и  $-3293,3$ .

Две ветви траекторий пересекают мнимую ось в точках  $\pm j1097,3$ , что соответствует значению параметра  $k = 1,51 \cdot 10^9$ . Система перестает быть устойчивой при дальнейшем увеличении параметра.

5. Определить значение коэффициента передачи регулятора в прямой цепи системы с передаточной функцией

$$W(s; k) = \frac{k}{(10s + 1)^3}$$

для обеспечения системе, замкнутой отрицательной единичной обратной связью, запас устойчивости по фазе 45 град. Определить установившуюся ошибку отработки единичного ступенчатого сигнала.

Для обеспечения запаса устойчивости системы по фазе равного 45 град необходимо, чтобы частота среза удовлетворяла условию

$$\pi + \arg W(j\omega_c) \geq \frac{\pi}{4}.$$

Поскольку  $\arg W(j\omega_c) = -3 \arctg 10\omega_c$ , то условие определения частоты среза принимает вид  $\arctg 10\omega_c \leq \frac{\pi}{4}$ , поэтому  $\omega_c \geq 0,1$ .

Коэффициент передачи  $k$  находят из условия  $\text{mod } W(j\omega_c; k) = 1$ , поскольку  $\omega_c \geq 0,1$ , то  $k \leq 2,8$ .

Установившаяся ошибка обработки единичного воздействия

$$e^* = \lim_{s \rightarrow 0} H_{eu}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{2,8}{(10s + 1)^3 + 2,8} \right) = 0,263.$$

### 7.3. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

Качество процессов управления в системе, которая испытывает стохастические воздействия, оценивается путем вычисления статистических характеристик выходного случайного процесса.

Предполагается, что линейная система с импульсной характеристикой  $k(t)$  является асимптотически устойчивой и входное воздействие на эту систему является стационарным эргодическим случайным процессом с известными характеристиками (см. А.3): математическим ожиданием  $m_u$  и дисперсией  $D_u$ , корреляционной функцией  $R_u(\tau)$  и спектральной плотностью  $S_u(\tau)$ . В этих условиях математическое ожидание установившейся реакции системы равно

$$\mathbb{M}y(t) = \mathbb{M} \int_0^{\infty} k(\rho)u(t - \rho)d\rho = \int_0^{\infty} k(\rho)\mathbb{M}u(t - \rho)d\rho = m_u \int_0^{\infty} k(\rho)d\rho. \quad (7.24)$$

Будем в дальнейшем, без ограничения общности, предполагать, что математические ожидания входного, следовательно и выходного процессов равны нулю.

Автокорреляционную функция установившегося выходного процесса находят из выражения

$$R_y(t, s) = \mathbb{M}[y(t)y(s)] = \int_0^{\infty} k(\theta) \int_0^{\infty} k(\eta)\mathbb{M}[u(t - \theta)u(s - \eta)]d\eta d\theta. \quad (7.25)$$

В силу стационарности входного процесса

$$\mathbb{M}[u(t - \theta)u(s - \eta)] = R_u(\tau - \eta + \theta),$$

поэтому

$$R_y(\tau) = \int_0^{\infty} k(\theta) \int_0^{\infty} k(\eta)R_u(\tau - \eta + \theta)d\eta d\theta. \quad (7.26)$$

Спектральная плотность выходного случайного процесса определяется соотношением:

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k(\theta) \int_0^{\infty} k(\eta)R_u(\tau - \eta + \theta)e^{-j\omega\tau}d\eta d\theta d\tau = \end{aligned} \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} k(\theta)e^{j\omega\theta} d\theta \int_0^{\infty} k(\eta)e^{j\omega\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} R_u(\beta)e^{-j\omega\beta} d\beta = \\
&= H(j\omega)H(-j\omega)S_u(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_u(\omega).
\end{aligned}$$

Взаимную корреляционную функцию выхода ко входу находят из соотношения

$$\begin{aligned}
R_{yu}(t, s) &= \mathbb{M}[y(t)u(s)] = \int_0^{\infty} k(\theta)\mathbb{M}[u(t-\theta)u(s)]d\theta = \\
&= \int_0^{\infty} k(\theta)R_u(\tau+\theta)d\theta = R_{yu}(\tau).
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Аналогично, взаимная корреляционная функция входа к выходу

$$R_{uy}(\tau) = \mathbb{M}[u(t)y(s)] = \int_0^{\infty} k(\theta)R_u(\tau-\theta)d\theta. \tag{7.29}$$

Заметим, что выражения для взаимных корреляционных функций имеют вид интеграла свертки, поэтому  $R_{uy}(\tau)$ , можно рассматривать как установившуюся реакцию системы на входной сигнал  $R_u(\tau)$ .

Взаимные спектральные плотности выхода ко входу и входа к выходу можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
S_{uy}(\tau) &= H(j\omega)S_u(\omega); \\
S_{yu}(\tau) &= H(-j\omega)S_u(\omega).
\end{aligned} \tag{7.30}$$

Дисперсию выходного случайного процесса находят из соотношения

$$Dy(t) = \mathbb{M}y^2(t) = R_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)d\omega. \tag{7.31}$$

В том случае, когда выражение для спектральной плотности является дробно-рациональным, вычисление дисперсии можно выполнить по таблицам Мак-Ленна или, используя прямой матричный метод.

Пусть

$$S(\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)}, \tag{7.32}$$

где многочлен

$$B(j\omega) = b_1(j\omega)^{2(n-1)} + b_2(j\omega)^{2(n-2)} + \dots + b_n, \tag{7.33}$$

а многочлен  $A(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n$  имеет корни только в левой полуплоскости.

Тогда интеграл можно вычислить, используя матричное соотношение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = (-1)^{n+1} \frac{N}{2a_0 G}, \quad (7.34)$$

где  $G$  — определитель матрицы Гурвица многочлена  $A(j\omega)$ ;  $N$  — определитель матрицы, которая получается из матрицы Гурвица многочлена  $A(j\omega)$  заменой первой строки коэффициентами многочлена  $B(j\omega)$ .

Таким образом, дисперсию процесса определяет выражение:

$$Dy(t) = (-1)^{n+1} \frac{N}{2a_0 G}. \quad (7.35)$$

**Примеры:**

**1.** Определить стохастические характеристики реакции системы с передаточной функцией  $H(s)$  и импульсной функцией  $k(t)$  на *белый шум* интенсивности  $S_u(\omega) = a^2$ .

Входной сигнал системы — стационарный случайный процесс с постоянной спектральной плотностью, выходной процесс также стационарен его дисперсию можно определить по выражению

$$Dy(t) = R_y(0) = \int_0^{\infty} k(\theta) \int_0^{\infty} k(\eta) a^2 \delta(\theta - \eta) d\theta d\eta = a^2 \int_0^{\infty} k^2(\theta) 2d\theta$$

или по выражению

$$Dy(t) = \frac{a^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega. \quad (7.36)$$

Взаимная спектральная плотность входа к выходу процесса пропорциональна амплитудно-частотной характеристике системы

$$S_{uy}(\omega) = a^2 H(j\omega), \quad (7.37)$$

а взаимная корреляционная функция входа к выходу пропорциональна импульсной функции системы

$$R_{uy}(\omega) = \int_0^{\infty} k(\theta) a^2 \delta(\tau - \theta) d\theta = a^2 k(\tau). \quad (7.38)$$

**2.** Идеализация входного случайного воздействия белым шумом допустима тогда, когда в полосе пропускания линейной системы спектральная плотность входного воздействия мало изменяется, что имеет место, когда эффективная полоса пропускания системы более узкая по сравнению с полосой частот входного воздействия.

Определить дисперсию реакции на *белый шум* интенсивности  $a^2$  системы с передаточной функцией  $H(s) = \frac{1}{T_s + 1}$ .

Дисперсию выходного шума определяет выражение:

$$Dy(t) = \frac{a^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T^2\omega^2 + 1} d\omega = a^2 \frac{1}{2\pi T} \operatorname{arctg} T\omega \Big|_0^{\infty} = \frac{a^2}{2T}.$$

**3.** На систему с передаточной функцией  $H(s) = \frac{1}{Ts + 1}$  воздействует шум со спектральной функцией  $S_u(\omega) = \frac{2b}{\alpha^2 + \omega^2}$ .

Найти стохастические характеристики выходного сигнала.

Спектральная плотность выходного сигнала системы определяется выражением

$$S_y(\omega) = \frac{2b}{(T^2\omega^2 + 1)(\alpha^2 + \omega^2)},$$

которое имеет дробно-рациональный вид, поэтому для вычисления дисперсии выходного шума воспользуемся матричным методом. Здесь

$$n = 2,$$

$$B(j\omega) = 2b,$$

$$A(j\omega) = (1 + jT\omega)(\alpha + j\omega) = T(j\omega)^2 + (T\alpha + 1)(j\omega) + \alpha.$$

Матрица Гурвица многочлена  $A(j\omega)$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} T\alpha + 1 & 0 \\ T & \alpha \end{pmatrix},$$

поэтому  $G = \alpha(T\alpha + 1)$  и  $N = \det \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ T & \alpha \end{pmatrix} = -2bT$ .

Дисперсия выходного случайного процесса, таким образом, равна

$$Dy(t) = (-1)^3 \frac{-2bT}{2T\alpha(T\alpha + 1)} = \frac{b}{\alpha(T\alpha + 1)}.$$

**4.** Определить дисперсию ошибки воспроизведения входного случайного сигнала по известной спектральной плотности ошибки воспроизведения

$$S_e = \frac{\omega^2 + 2}{(\omega^4 - \omega^2 + 1)(\omega^2 + 1)}.$$

Дробно-рациональный вид этого выражения позволяет вычислить дисперсию ошибки воспроизведения.

Из выражения спектральной плотности находим многочлен

$$A(j\omega) = ((j\omega)^2 + (j\omega) + 1)(j\omega + 1),$$

у которого  $n = 3$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 1$  и многочлен  $B(j\omega) = -(j\omega)^2 + 2$ , у которого  $2n - 2 = 4$ , поэтому  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = -1$ ,  $b_3 = 2$ .

Для многочлена  $A(j\omega)$  матрица Гурвица принимает вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому  $G = 3$ ,  $N = 5$  и дисперсия ошибки воспроизведения равна 0,833.

5. Двигатель с передаточной функцией  $W(s) = \frac{9}{s(0,01s + 1)}$ , охваченный отрицательной обратной связью, образует замкнутую систему позиционирования. Входной задающий сигнал имеет прямоугольную форму со значениями  $\pm 1$ . Смена знака входного сигнала образует стационарный случайный процесс Пуассона с параметром  $\mu$  — средней частотой перемены знака. Найти средний квадрат ошибки позиционирования.

Корреляционная функция входного случайного процесса (см. А.3)

$$R_u(\tau) = e^{-2\mu|\tau|}.$$

Спектральная плотность входного случайного процесса находим с помощью преобразования Фурье его корреляционной функции

$$S_u(\omega) = \frac{4\mu}{\omega^2 + 4\mu^2}.$$

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке равна

$$H_e(s) = 1 - \frac{9}{0,01s^2 + s + 9} = \frac{0,01s^2 + s}{0,01s^2 + s + 9},$$

поэтому спектральная плотность ошибки позиционирования при  $\mu = 5$  принимает вид

$$S_e(\omega) = \frac{20H_e(j\omega)H_e(-j\omega)}{\omega^2 + 100}.$$

Подставляя сюда выражение передаточной функции, получим дробно-рациональное выражение

$$S_e(\omega) = 20 \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)},$$

в котором

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= (0,01(j\omega)^2 + j\omega + 9)(j\omega + 10) = \\ &= 0,01(j\omega)^3 + 1,1(j\omega)^2 + 19j\omega + 90, \\ B(j\omega) &= (0,01(j\omega)^2 + j\omega)(0,01(-j\omega)^2 - j\omega) = \\ &= 0,01^2(j\omega)^4 + (j\omega)^2. \end{aligned}$$

Для этих выражений  $n = 3$ ;  $a_0 = 0,01$ ;  $a_1 = 1,1$ ;  $a_2 = 19,0$ ;  $a_3 = 90$ ;  $b_1 = 0,012$ ;  $b_2 = b_3 = 0$ .



Матрица Гурвица многочлена  $A(j\omega)$  принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1,1 & 90 & 0 \\ 0,01 & 19 & 0 \\ 0 & 1,1 & 90 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$N = \det \begin{pmatrix} 0,01 & 1 & 0 \\ 0,01 & 19 & 0 \\ 0 & 1,1 & 90 \end{pmatrix},$$

откуда находим  $G = 1800, 0$ ;  $N = 0, 729$ .

Искомое значение среднего квадрата ошибки позиционирования равно  $D_e = 0, 405$ , что в сравнении с дисперсией входного сигнала  $D_u = R_u(0) = 1$  составляет 40, 5%.

#### 7.4. МАШИННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

Современные инструментальные средства анализа и синтеза систем управления представлены (см. А.4) множеством различных специализированных программных пакетов и комплексов, которые позволяют в диалоговом режиме:

- выполнять операции над матрицами и полиномами, выполнять символьные операции дифференцирования, интегрирования, функциональные преобразования;
- составлять и преобразовывать математические модели исследуемой системы, вычислять временные и частотные характеристики, строить корневые годографы;
- анализировать чувствительность и устойчивость, проверять управляемость и наблюдаемость системы, находить ее полюсы и нули, находить области параметрической устойчивости, сравнивать переходные процессы по интегральным критериям и находить лучший, оптимизировать параметры системы;
- определять параметры и характеристики стохастических сигналов на входе и на выходе системы.

Эти программные средства обладают развитым сервисом, что позволяет:

- строить и сравнивать графики нескольких процессов, изображать взаимные зависимости, фазовые кривые и портреты;
- строить характеристики в линейном и логарифмическом масштабе, строить частотные диаграммы;
- изображать и преобразовывать структурные модели системы, наносить на поле графика текстовые пояснения, при этом графические построения могут быть выполнены в двух- и трехмерном представлении.

Оценку качества процессов управления с использованием программных инструментальных средств осуществляют путем прямого моделирования и сравнения числовых показателей или вычисленных интегральных оценок процессов. Например, моделированием в пакете *Simulink* переходного процесса в системе канонической структуры и передаточной функцией разомкнутой части в виде

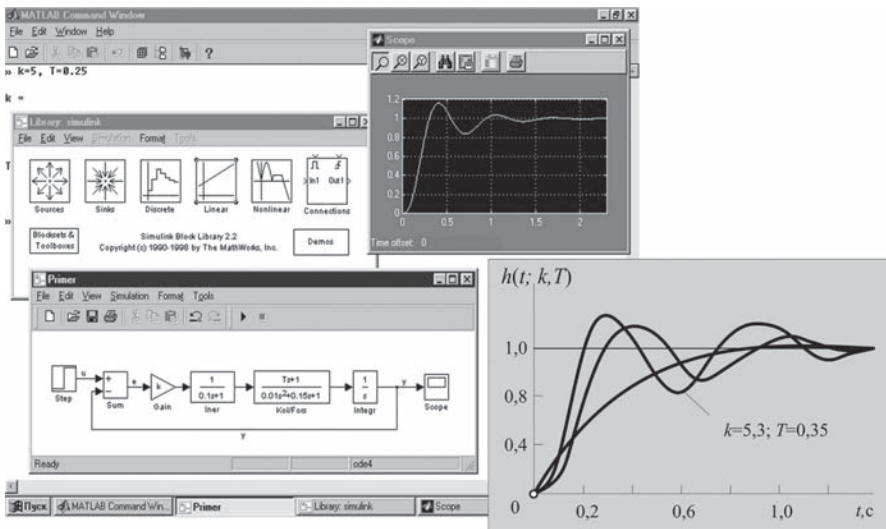


Рис. 7.2

Структура модели в терминах программного пакета Simulink и результаты моделирования

$$W(s) = \frac{k(Ts + 1)}{s(0,01s^2 + 0,15s + 1)(0,1s + 1)}.$$

На рис. 7.2 представлена в терминах программного пакета *Simulink* структура модели системы с передаточной функцией разомкнутого тракта  $W(s) = \dots$  и результаты моделирования трех процессов зависимости от параметров  $k, T$ , по которым можно судить о качестве переходных процессов.

### 7.5. УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти значение установившейся ошибки при обработке единичного ступенчатого сигнала системой с пропорциональным регулятором и

$$W_o(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}.$$

2. Найти первые три коэффициента ошибок для системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(s) = \frac{k(b_0s^2 + b_1s + 1)}{s^2(a_0s^2 + 1)}.$$

3. Определить вынужденную ошибку следящей системы при обработке линейного входного сигнала  $u(t) = 12 + 4t$  рад, если в разомкнутом состоянии эта система имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{90}{s(0,05s + 1)(0,1s + 1)}.$$

4. Переходная функция системы, найденная аналитически, имеет вид:

$$h(t) = 1 - 0,055e^{-5,3t} + 1,1e^{-3,3t} \sin(11,8t + 1,1).$$

Найти показатели качества этого переходного процесса для  $\Delta = 0,05$ .

5. Построить приближенно переходный процесс для системы с известной вещественной частотной характеристикой:

$$\begin{aligned} \bullet \quad U(\omega) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_0; \\ 0, & \omega > \omega_0; \end{cases} \\ \bullet \quad U(\omega) &= \begin{cases} 1 - \frac{\omega}{\omega_0}, & 0 \leq \omega \leq \omega_0; \\ 0, & \omega > \omega_0. \end{cases} \end{aligned}$$

6. Определить коэффициент усиления  $k$ , при котором обработка системой единичного ступенчатого сигнала будет иметь наименьшую интегральную квадратичную ошибку. Передаточная функция разомкнутой части системы имеет вид

$$W(s) = \frac{k}{s(0,04s + 1)(0,12s + 1)}.$$

7. Для системы с передаточной функцией разомкнутой части

$$W(s) = \frac{1}{s^3 + \alpha s^2 + \beta s + 1}$$

найти значения параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ , которые бы минимизировали интегральную оценку  $J_0$  при обработке замкнутой системой единичного ступенчатого воздействия.

8. Найти характеристики случайного процесса на выходе динамического звена с импульсной характеристикой  $k(t) = te^{-5t}$ ,  $t > 0$ , если входной случайный процесс:

- $\zeta(t) = b$ , где  $b$  — случайная величина равномерно распределенная на  $[-8, 12]$ ;
- $\zeta(t) = 4 \sin(2\pi t + \varphi)$ ,  $\varphi$  — случайная величина равномерно распределенная на  $[0, 2\pi]$ ;
- $\zeta(t)$  — белый шум с постоянной составляющей, равной 2, и интенсивностью  $4 \text{ с}^{-2}$ ;
- $\zeta(t)$  — имеет автокорреляционную функцию

$$R_\zeta(\tau) = 2e^{-3|\tau|}.$$

9. Найти средний квадрат выходного сигнала звена, у которого:

- $k(t) = te^{-5t}$ ,  $t \geq 0$  и на которое воздействует белый шум интенсивности  $3 \text{ с}^{-2}$ ;
- $k(t) = \delta(t) - 2e^{-2t}$ ,  $t \geq 0$  и на которое воздействует шум с корреляционной функцией

$$R(\tau) = 10(e^{-2|\tau|} + 1);$$

- передаточная функция имеет вид

$$W(s) = \frac{s}{s^2 + 15s + 50}$$

и на которое воздействует белый шум интенсивности  $1,5 \text{ с}^{-2}$ ;

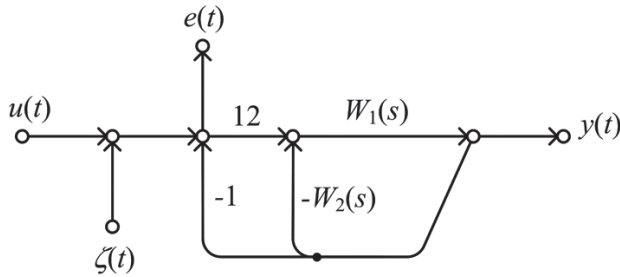


Рис. 7.3  
Структура следящей системы, в которой входной сигнал — случайный процесс на фоне шума

- импульсная характеристика определяется выражением

$$k(t) = te^{-5t}, t \geq 0$$

и на которое воздействует шум со спектральной плотностью

$$S(\omega) = \frac{150}{\omega^2 + 81}.$$

**10.** Вычислить среднеквадратичную ошибку слежения для системы:

- структура которой показана на рис. 7.3, для которой

$$W_1(s) = \frac{1}{0,1s + 1}, W_2(s) = \frac{0,02s^2}{0,05s + 1}.$$

На вход системы подается полезный сигнал  $u(t)$  с корреляционной функцией  $R_u(\tau) = 2e^{-3|\tau|}$  и белый шум  $\zeta(t)$  интенсивности  $3\epsilon^{-2}$ ;

- передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(s) = \frac{250(0,62s + 1)}{s(0,002s + 1)(0,02s + 1)(0,01s + 1)(2s + 1)},$$

а на вход системы воздействует белый шум интенсивности  $10^{-3} \epsilon^{-2}$ .

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ В ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

- Управляемость и наблюдаемость дискретных систем
- Устойчивость линейных дискретных систем управления
- Характеристики дискретных автоматических систем управления
- Анализ качества процессов управления
- Упражнения

## 8.1. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим линейную дискретную  $n$ -мерную систему

$$\Sigma^{(n)}(\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C}) : \quad \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0); \quad h, \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k).$$

**Определение.** Система  $\Sigma^{(n)} : (\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C})$  *вполне управляема*, если существует управляющая последовательность  $\{\mathbf{u}(k)\}$ , которая переводит ее из начального состояния в произвольное финальное состояние за конечное число шагов.

**Теорема** (R. Kalman, 1961). Система  $\Sigma^{(n)} : (\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C})$  *вполне управляема тогда и только тогда, когда ранг матрицы управляемости*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M}\mathbf{N} \\ \mathbf{M}^2\mathbf{N} \\ \dots \\ \mathbf{M}^{n-1}\mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

равен  $n$  — порядку системы.

*Доказательство.* Движение системы  $\Sigma^{(n)} : (\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C})$  при известной управляющей последовательности  $\{\mathbf{u}(k)\}$ , за  $n$  шагов достигнет состояния:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{M}^n\mathbf{x}(0) + \mathbf{M}^{n-1}\mathbf{N}\mathbf{u}(0) + \mathbf{M}^{n-2}\mathbf{N}\mathbf{u}(1) + \dots + \mathbf{N}\mathbf{u}(n-1).$$

Запишем это выражение в матричной форме:

$$\mathbf{x}(n) - \mathbf{M}^n\mathbf{x}(0) = \\ = \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M}\mathbf{N} \\ \dots \\ \mathbf{M}^{n-1}\mathbf{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(n-1) & \mathbf{u}(n-2) & \dots & \mathbf{u}(0) \end{pmatrix}^T.$$

Это выражение представляет собой неоднородное матричное алгебраическое уравнение относительно  $n$  переменных  $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(n-1)$ , которое может быть разрешимо тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$\left( \mathbf{N} : \mathbf{M}\mathbf{N} : \dots : \mathbf{M}^{n-1}\mathbf{N} \right)$$

коэффициентов этого уравнения равен числу неизвестных системы. Что и требовалось доказать.

**Определение.** Система  $\Sigma^{(n)} : (\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C})$  *вполне наблюдаема*, если существует такое конечное  $k$ , что начальное состояние  $\mathbf{x}(0)$  системы может быть определено по значениям управляющей

$$\{\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(k-1)\}$$

и выходной  $\{\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(k-1)\}$  последовательностей.

**Теорема** (R. Kalman, 1961). Система  $\Sigma^{(n)} : (\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C})$  *вполне наблюдаема тогда и только тогда, когда ранг матрицы наблюдаемости*

$$\left( \mathbf{C}^T : \mathbf{M}^T \mathbf{C}^T : (\mathbf{M}^T)^2 \mathbf{C}^T : \dots : (\mathbf{M}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T \right) \quad (8.2)$$

равен  $n$  — порядку системы.

*Доказательство.* Положим, не ограничивая общности,  $\mathbf{u}(k) = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$  и пусть известны все значения выходной последовательности

$$\{\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(n-1)\}.$$

Запишем уравнения выхода для каждого  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(1) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(1) = \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(2) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(2) = \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{x}(1) = \mathbf{C}\mathbf{M}^2\mathbf{x}(0), \\ &\dots \\ \mathbf{y}(n-1) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(n-1) = \mathbf{C}\mathbf{M}^{n-1}\mathbf{x}(0). \end{aligned}$$

Воспользуемся матричной записью этих соотношений.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(1) \\ \mathbf{y}(2) \\ \dots \\ \mathbf{y}(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{M} \\ \mathbf{C}\mathbf{M}^2 \\ \dots \\ \mathbf{C}\mathbf{M}^{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{x}(0).$$

Имеем неоднородное матричное алгебраическое уравнение относительно  $n$  неизвестных координат вектора  $\mathbf{x}(0)$ . Это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{M} \\ \mathbf{C}\mathbf{M}^2 \\ \dots \\ \mathbf{C}\mathbf{M}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

коэффициентов этого уравнения равен числу неизвестных. Что и требовалось доказать.

Особенность дискретных систем в отличие от непрерывных состоит в том, что свойства управляемости и наблюдаемости зависят от шага квантования. Условия управляемости и наблюдаемости зависят от матриц системы, которые в свою очередь зависят от периода квантования. Для некоторых значений шага квантования дискретная система может потерять управляемость или наблюдаемость.

**Примеры:**

1. Проверить свойство управляемости системы

$$\Sigma^{(2)}: \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Система второго порядка, но ранг ее матрицы управляемости  $\begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{MN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  равен единице, следовательно система не является вполне управляемой.

2. Для системы

$$\Sigma^{(2)}: \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

найти управляющую последовательность, чтобы перевести ее за два шага в состояние  $\mathbf{x}(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Конечное состояние системы за два шага определяет выражение

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{M}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{MN}u(0) + \mathbf{N}u(1).$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} u(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u(1),$$

откуда следует, что  $2u(0) + u(1)$  равно одновременно  $-10$  и  $-4$ , что невозможно. Следовательно, состояние  $\mathbf{x}(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  оказывается недостижимым. Этот факт объясняется тем, что система не является вполне управляемой, действительно  $\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{MN} \end{pmatrix} \neq 2$ .

Свойство системы не быть вполне управляемой не означает, что все состояния недостижимы. Например, из настоящего начального состояния состояние  $\mathbf{x}(2) = \begin{pmatrix} 20 \\ -14 \end{pmatrix}$  — достижимо.

В самом деле, искомая управляющая последовательность удовлетворяет соотношению

$$\begin{pmatrix} 20 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} u(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u(1),$$

откуда следует, что  $2u(0) + u(1) = 10$ . Значит достигнуть цели можно, выбрав произвольным  $u(0)$  и вычислив  $u(1) = -2u(0)$ .

К примеру, управляющие последовательности:  $u(0) = -1$ ,  $u(1) = 2$  или  $u(0) = 1$ ,  $u(1) = -2$  могут выполнить заданный перевод системы.

**3.** Восстановить начальный вектор состояния системы

$$\Sigma^{(2)}: \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,45 & -0,25 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (1 \ -0,25).$$

Восстановить начальный вектор состояния системы невозможно, поскольку система не является вполне наблюдаемой.

$$\text{rank} = \left( \mathbf{C}^T; \mathbf{M}^T \mathbf{C}^T \right) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0,2 \\ -0,25 & -0,05 \end{pmatrix} \neq 2.$$

**4.** Система  $\Sigma^{(2)}: \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = (1 \ 2)$  является вполне наблюдаемой:

$$\text{rank} = \left( \mathbf{C}^T; \mathbf{M}^T \mathbf{C}^T \right) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 2.$$

Из начального состояния эта система под воздействием  $u(0) = -4$  за один шаг была переведена в новое состояние. Выходной сигнал системы был измерен в начальный момент  $y(0) = 9$  и после первого шага  $y(1) = 6$ . Восстановить начальное состояние системы.

Составим уравнения выхода до и после первого шага

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(1) - \mathbf{C}\mathbf{N}u(0) &= \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{x}(0). \end{aligned}$$

Искомая система уравнений относительно неизвестных  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$  после подстановки числовых данных принимает вид

$$\begin{aligned} x_1(0) + 2x_2(0) &= 9; \\ 3x_1(0) - 3x_2(0) &= 18. \end{aligned}$$

Откуда находим, что  $x_1(0) = 7$ ,  $x_2(0) = 1$ .

**5.** Непрерывная модель гармонического осциллятора задана матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (0 \ 1).$$

Эта система всегда управляема и наблюдаема. Дискретная модель гармонического осциллятора задана матрицами

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= e^{\mathbf{A}h} = \mathcal{L}^{-1}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \Big|_{t=h} = \mathcal{L}^{-1} \begin{pmatrix} s & -\omega \\ \omega & s \end{pmatrix} \Big|_{t=h} = \\ &= \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2 + \omega^2} \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ -\omega & 1 \end{pmatrix} \Big|_{t=h} = \begin{pmatrix} \cos \omega h & \sin \omega h \\ -\sin \omega h & \cos \omega h \end{pmatrix}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \int_0^h e^{\mathbf{A}\theta} d\theta \mathbf{B} = \int_0^h \begin{pmatrix} \cos \omega\theta & \sin \omega\theta \\ -\sin \omega\theta & \cos \omega\theta \end{pmatrix} d\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}(1 - \cos \omega t) \\ \frac{1}{\omega} \sin \omega t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Условия управляемости и наблюдаемости нарушаются, когда шаг дискретизации оказывается пропорциональным  $\pi/\omega$ , в этом случае матрицы управляемости и наблюдаемости оказываются вырожденными, их определители равны  $-\frac{2}{\omega^2} \sin \omega h (1 - \cos \omega h)$ , и  $-\sin \omega h$  соответственно.

## 8.2. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим линейную дискретную систему управления, представленную внутренней моделью состояния

$$\begin{aligned} \Sigma^{(n)}(\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C}) : \quad \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k); \quad \mathbf{x}(0), h, \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (8.3)$$

либо внешней моделью типа *вход-выход*

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)U(z); \\ H(z) &= \frac{B_m(z)}{A_n(z)}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Для линейных дискретных систем понятия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости вводится аналогично тому, как это вводилось для непрерывных линейных систем. Эти свойства являются свойствами общесистемными, а не отдельных траекторий.

Устойчивость линейной дискретной системы полностью определяется ее собственными числами — корнями характеристического уравнения системы, которое определяется выражением  $\varphi(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{M}) = 0$  для модели состояния и для модели *вход-выход* в виде

$$\varphi(\lambda) = A_n(z) \Big|_{z=\lambda} = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n = 0. \quad (8.5)$$

**Теорема.** *Линейная дискретная система  $\Sigma^{(n)}: (\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C})$  асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда ее собственные числа лежат строго внутри единичного круга.*

Справедливость этого утверждения следует из свойств дискретного преобразования  $z = e^{sh}$ , которое отображает левую комплексную  $s$ -полуплоскость во внутренность единичного круга на комплексной  $z$ -плоскости. Справедливость этой теоремы прямо следует из свойств собственного движения системы.

Собственное движение системы (8.3) описывается однородным уравнением

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k); \quad \mathbf{x}(0),$$

решение этого уравнения  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{M}^k \mathbf{x}(0)$ .

Положим, не ограничивая общности, что все собственные числа матрицы  $\mathbf{M}$  действительные и различные, тогда эту матрицу можно привести к диагональному виду

$$\mathbf{M} = \text{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n).$$

Для этого случая решение уравнения движения принимает вид

$$\mathbf{x}(k) = \text{diag}(\lambda_1^k \lambda_2^k \dots \lambda_n^k) \mathbf{x}(0) = (\lambda_1^k x_1(0) \quad \lambda_2^k x_2(0) \quad \dots \quad \lambda_n^k x_n(0))^T.$$

Для достижения асимптотической устойчивости системы все ее движения должны стремиться к нулю с ростом  $k$ , но это возможно, как следует из выражения для  $\mathbf{x}(k)$ , лишь когда все  $|\lambda_i| < 1$ .

Для определения устойчивости линейной дискретной системы без определения ее собственных чисел используют алгебраические и частотные критерии.

Среди алгебраических критериев выделим два: *косвенный* на основе критерия Рауса–Гурвица и *прямой* — критерий Джури.

• Для использования косвенного критерия выполним над характеристическим многочленом дискретной системы

$$A_n(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n$$

преобразование, которое осуществляет конформное отображение внутренности единичного круга комплексной плоскости на левую комплексную полуплоскость. Таким отображением является, например, дробно-линейное *преобразование Мёбиуса*

$$\lambda = \frac{\mu + 1}{\mu - 1}. \quad (8.6)$$

При этом характеристический многочлен  $A_n(\lambda)$  системы преобразуется в некий многочлен  $\check{A}_n(\mu)$ . В силу конформных свойств преобразования, корни исходного многочлена  $A_n(\lambda)$  окажутся внутри единичного круга, если корни многочлена  $\check{A}_n(\mu)$  являются левыми.

Если среди корней преобразованного многочлена  $\check{A}_n(\mu)$  есть чисто мнимые, то и среди корней  $A_n(\lambda)$  есть корни, лежащие на единичной окружности.

Таким образом, критерий устойчивости над многочленом  $A_n(\lambda)$  сводится к применению критерия Гурвица к многочлену  $\check{A}_n(\mu)$ .

**Критерий Рауса–Гурвица.** Дискретная линейная система  $\Sigma^{(n)}: (\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C})$  будет асимптотически устойчивой, если преобразованный по Мёбиусу ее характеристический многочлен удовлетворяет алгебраическим критериям Рауса или Гурвица.

• Для применения прямого критерия составим по характеристическому многочлену дискретной системы *таблицу Джури* так, что первая и вторая строки ее — это коэффициенты характеристического многочлена, записанные в прямом и обратном порядке. Третью строку получают из второй умножением на  $\alpha_n/\alpha_0 = \beta_n$  и вычитанием результата из первой строки. Четвертая строка — это третья, записанная в обратном порядке.

Таблица Джури имеет  $2n + 1$  строку.

$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\dots$	$\alpha_{n-1}$	$\alpha_n$	
$\alpha_n$	$\alpha_{n-1}$	$\dots$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\beta_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_0}$
$\alpha_{0,(1)}$	$\alpha_{1,(2)}$	$\dots$	$\alpha_{n-1,(n)}$		
$\alpha_{n-1,(n)}$	$\alpha_{n-2,(n-1)}$	$\dots$	$\alpha_{0,(1)}$	$\beta_{n-1} = \frac{\alpha_{n-1,(n-1)}}{\alpha_{0,(n-1)}}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		
$\alpha_{0,(n-1)}$					

**Критерий Джури** (*E. Jury*, 1958). *Корни характеристического уравнения системы  $\Sigma^{(n)}$ : (M, N, C) лежат внутри единичного круга и, следовательно, система будет асимптотически устойчивой, тогда и только тогда, когда элементы первого столбца*

$$\alpha_0, \alpha_{0,(1)}, \alpha_{0,(2)}, \dots, \alpha_{0,(n-1)}$$

*таблицы Джури положительны.*

• Среди частотных критериев устойчивости дискретной линейной системы отметим критерий Найквиста.

Пусть дискретная система задана внешней моделью в виде передаточной функции  $W(z)$  разомкнутой части.

**Определение.** Отображение

$$W(e^{j\omega h}) = W(z) \Big|_{z=\exp(j\omega h)}$$

при изменении аргумента  $\omega$  от 0 до частоты квантования  $\omega_q = \frac{2\pi}{h}$  называют **частотным годографом Найквиста** дискретной системы.

**Критерий Найквиста** (*H. Nyquist*, 1932). *Если разомкнутая дискретная система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы достаточно, чтобы годограф  $W(e^{j\omega h})$  не охватывал контрольной точки  $(-1, 0)$  на действительной оси.*

**Примеры:**

**1.** Определить условия асимптотической устойчивости для дискретной системы второго порядка, используя критерий Рауса–Гурвица.

Характеристический полином дискретной системы второго порядка имеет вид  $A_2(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2$ .

Выполнив над ним дробно-линейное преобразование  $\lambda = \frac{\mu + 1}{\mu - 1}$ , получим

$$\begin{aligned}\check{A}_2(\mu) &= (1 + \mu)^2 + \alpha_1(1 - \mu^2) + \alpha_2(1 - \mu)^2 = \\ &= (1 - \alpha_1 + \alpha_2)\mu^2 + 2(1 - \alpha_2)\mu + (1 + \alpha_1 + \alpha_2).\end{aligned}$$

Для этого преобразованного многочлена критерий Гурвица устанавливает условия:

$$1 - \alpha_1 + \alpha_2 > 0, \quad 1 - \alpha_2 > 0, \quad 1 + \alpha_1 + \alpha_2 > 0,$$

откуда следуют параметрические условия асимптотической устойчивости дискретной системы:  $\alpha_2 < 1$ ,  $\alpha_2 > |\alpha_1| - 1$ .

**2.** Определить условия асимптотической устойчивости для дискретной системы второго порядка, используя критерий Джюри.

Для характеристического полинома системы второго порядка

$$A_2(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2$$

таблица Джюри принимает вид

1	$\alpha_1$	$\alpha_2$	
$\alpha_2$	$\alpha_1$	1	$\beta_2 = \alpha_2$
$1 - \alpha_2^2$	$\alpha_1(1 - \alpha_2)$		
$\alpha_1(1 - \alpha_2)$	$1 - \alpha_2^2$	$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_2}$	
$(1 - \alpha_2^2) - \alpha_1^2 \frac{1 - \alpha_2}{1 + \alpha_2}$			

Откуда находим необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости системы:

$$1 - \alpha_2^2 > 0, \quad (1 - \alpha_2^2) - \alpha_1^2 \frac{1 - \alpha_2}{1 + \alpha_2} > 0.$$

Иначе в виде:  $|\alpha_2| < 1$ ,  $\left| \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_2} \right| < 1$ , что совпадает с результатом предыдущего примера.

На рис. 8.1 представлена область устойчивости системы в плоскости параметров  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ .

**3.** Используя алгебраические критерии, определить, что для асимптотической устойчивости замкнутой дискретной системы управления, у которой в прямом тракте имеется идеальный импульсный элемент с периодом квантования 1 с, восстановитель нулевого порядка и непрерывная часть с передаточной функцией

$$W(z; k) = \frac{k}{z^2 + 1,5z}$$

достаточно иметь  $0 < k < 3,954$ .

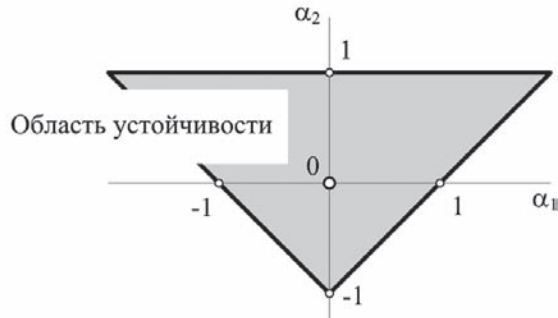


Рис. 8.1

Параметрическая область устойчивости дискретной системы второго порядка

4. Проверить свойство асимптотической устойчивости замкнутой дискретной системы по ее характеристическому уравнению

$$27\lambda^3 + 27\lambda^2 + 9\lambda + 1 = 0.$$

Дробно-линейное преобразование  $\lambda = \frac{1 + \mu}{1 - \mu}$  этого уравнения приводит к уравнению

$$\mu^3 + 6\mu^2 + 12\mu + 8 = 0,$$

которое, согласно критерию Гурвица, имеет корни в левой полуплоскости. Значит характеристические числа анализируемой дискретной системы располагаются внутри единичного круга. Система асимптотически устойчива.

5. Применив частотный критерий, проверить свойство асимптотической устойчивости замкнутой дискретной системы, если известна передаточная функция разомкнутой части

$$W(z) = \frac{0,64z}{z^2 - 1,21z + 0,21}.$$

Частотный годограф Найквиста определяет выражение

$$W(e^{j\omega h}) = \frac{0,64e^{j\omega h}}{(e^{j\omega h})^2 - 1,21e^{j\omega h} + 0,21}.$$

В этом выражении следует выполнить замену

$$e^{j\omega h} = \cos \omega h + j \sin \omega h,$$

отделить действительную и мнимую части и, изменяя частоту от 0 до  $\pi/h$ , построить на комплексной плоскости годограф  $W(e^{j\omega h})$  и его зеркальное отражение при изменении частоты от  $\pi/h$  до  $2\pi/h$ .

На рис. 8.2 приведен годограф Найквиста, который проходит правее контрольной точки, не охватывая ее, и, следовательно, замкнутая дискретная система будет асимптотически устойчивой.

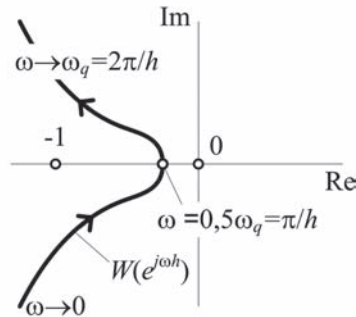


Рис. 8.2

Годограф Найквиста дискретной системы второго порядка

### 8.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Структура дискретной автоматической системы показана на рис. 8.3. Опишем основные соотношения и характеристики этой системы:

- передаточная функция замкнутой дискретной системы

$$H^*(s) = \frac{G^*(s)}{1 + G^*(s)}; \quad (8.7)$$

- уравнение выхода в изображениях  $Y^*(s) = H^*(s)U^*(s)$ ;
- уравнение ошибки в изображениях  $E^*(s) = (1 - H^*(s))U^*(s)$ ;
- передаточная функция ошибки системы  $H_e^*(s) = 1 - H^*(s)$ ;
- временная характеристика  $g(kh)$ ;
- уравнение выхода

$$y(kh) = \sum_{m=0}^k g((k-m)h)u(mh); \quad (8.8)$$

Вынужденные процессы в дискретной системе описывает уравнение

$$y^\circ(kh) = \sum_{m \geq 0} g(mh)u((k-m)h). \quad (8.9)$$

Используем это соотношение для определения вынужденной реакции на гармоническое воздействие  $u(kh) = Ue^{j\omega kh}$ :

$$\begin{aligned} y^\circ(kh) &= \sum_{m \geq 0} g(mh)Ue^{j\omega(k-m)h} = \\ &= \sum_{m \geq 0} g(mh)e^{-j\omega mh}Ue^{j\omega kh} = H^*(j\omega)u(kh). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Функцию  $H^*(j\omega)$  называют **частотной характеристикой дискретной системы**.

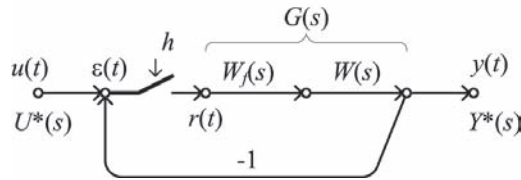


Рис. 8.3  
Структура дискретной автоматической системы

Найдем аналогично тому, как это делалось в непрерывных системах, вынужденную ошибку обработки произвольного входного воздействия через внутренние свойства системы и производные внешнего воздействия. Подставим в формулу (8.9) вынужденного движения разложение в ряд Тейлора внешнего воздействия

$$u((k-m)h) = \sum_{r \geq 0} (-1)^r u^{(r)}(kh) \frac{(mh)^r}{r!},$$

получим

$$y^\circ(kh) = \sum_{r \geq 0} \left[ \sum_{m \geq 0} (-1)^r g(mh) (mh)^r \right] \frac{u^{(r)}(kh)}{r!}. \quad (8.11)$$

Выражение, стоящее в прямых скобках, представляют собой  $r$ -ые **моменты** решетчатой функции временной характеристики системы, которые обозначим  $\mu_r$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots$

Моменты  $\mu_r$  совпадают со значением  $r$ -ой производной по  $s$  от передаточной функции системы  $H^*(s)$  при  $s = 0$ :

$$\mu_r = \left. \frac{d^r}{ds^r} H^*(s) \right|_{s=0}. \quad (8.12)$$

Теперь можно вычислить вынужденный процесс дискретной системы

$$y^\circ(kh) = \sum_{r \geq 0} \mu_r \frac{u^{(r)}(kh)}{r!} \quad (8.13)$$

и вынужденную ошибку  $e^\circ(kh) = u(kh) - y^\circ(kh)$  обработки входного сигнала

$$e^\circ(kh) = (1 - \mu_0)u(kh) - \sum_{r \geq 1} \mu_r \frac{u^{(r)}(kh)}{r!} = \sum_{r \geq 0} c_r \frac{u^{(r)}(kh)}{r!}, \quad (8.14)$$

где  $c_0 = 1 - \mu_0$ ;  $c_r = -\mu_r$ ;  $r = 1, 2, \dots$  — коэффициенты ошибок дискретной системы. Эти коэффициенты можно вычислять, используя соотношения:

$$c_r = \left. \frac{d^r}{ds^r} H_e^*(s) \right|_{s=0}. \quad (8.15)$$

Вынужденную установившуюся ошибку можно оценить также, используя свойства  $Z$ -преобразования, в частности *теорему о конечном значении* (см. А.2):

$$e^\circ(kh) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kh) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z), \quad (8.16)$$

где  $E(z) = H_e(z)U(z)$ .

При обработке дискретной системой ступенчатого воздействия

$$u(kh) = \alpha_0, \quad U(z) = \alpha_0 \frac{z}{z-1}$$

установившаяся ошибка равна

$$e^\circ(kh) = \lim_{z \rightarrow 1} \alpha_0 H_e(z), \quad (8.17)$$

а при обработке линейного воздействия

$$u(kh) = \alpha_1 kh, \quad U(z) = \alpha_1 \frac{hz}{(z-1)^2} \quad (8.18)$$

установившаяся ошибка

$$e^\circ(kh) = \lim_{z \rightarrow 1} \alpha_1 \frac{h}{z-1} H_e(z). \quad (8.19)$$

Определим условия безошибочного воспроизведения дискретной системой входного полиномиального сигнала.

Если полиномиальный сигнал нулевого порядка  $u(kh) = \alpha_0$ , то вынужденная ошибка равна нулю, когда  $c_0 = H_e^*(0) = 0$ , но это возможно, когда

$$\frac{1}{1+G^*(0)} = 0.$$

Добиться этого можно, если, например, непрерывная часть содержит интегратор или дискретная часть содержит *звено с памятью*, передаточная функция которого

$$\frac{1}{e^{sh} - 1}.$$

Для безошибочного воспроизведения полиномиального сигнала порядка  $q$  необходимо, чтобы  $c_0 = c_1 = \dots = c_q = 0$ , что возможно, если в прямом тракте системы имеется соответствующее число интеграторов или звеньев памяти.

#### 8.4. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

Качество процессов управления в дискретной системе оценивают по переходной функции — реакции этой системы на тестовый сигнал в виде единичной ступенчатой функции.

Показателями качества являются: *время установления, нарастания и запаздывания, перерегулирование и число максимумов*.



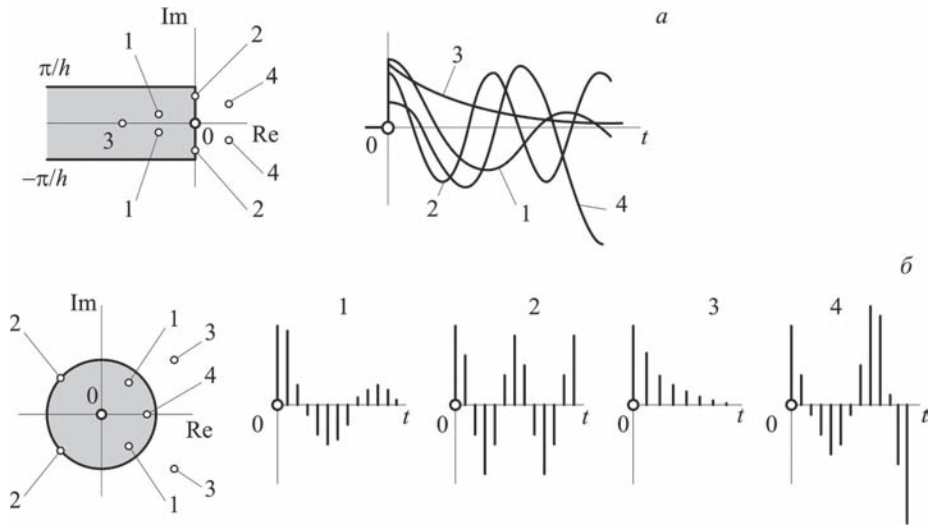


Рис. 8.4

Вид переходного процесса в зависимости от характеристических чисел системы: для непрерывной системы (а) и для дискретной системы (б)

Следует помнить, что модели дискретных систем правильно описывают поведение этих систем только в моменты квантования. Но истинная реакция — выходной сигнал системы является непрерывной функцией времени, поэтому только для достаточно малого периода квантования можно говорить об адекватном восстановлении непрерывной реакции системы по числовым данным, вычисленным по дискретным моделям. Качество процессов дискретной системы зависит от периода квантования. Ранее в 3.3 была установлена связь между  $s$ - и  $z$ -комплексными плоскостями.

Качество переходных процессов в дискретной системе, также как и в непрерывной системе зависит от местоположения корней характеристического многочлена относительно единичного круга на  $z$ -комплексной плоскости, который является конформным образом левой  $s$ -комплексной полуплоскости.

Например, для непрерывной системы второго порядка переходной процесс имеет экспоненциально колебательный вид, показанный на рис. 8.4, а. Собственные числа такой системы — комплексно сопряженная левая пара, собственные числа соответствующей дискретной системы лежат внутри единичного круга и дискретный процесс — затухающий колебательный.

Если же собственные числа непрерывной системы — чисто мнимая пара, то процесс незатухающий колебательный, как видно из рис. 8.4, б.

Для соответствующей дискретной системы собственные числа лежат на единичной окружности и их местоположение, зависящее от частоты квантования, может привести к эффекту изменения частоты дискретных колебаний.

Если собственные числа левые действительные, то для непрерывной и дискретной систем процесс будет экспоненциальным, как показано на рис. 8.4, в. Если у

непрерывной системы есть правые характеристические числа, а у соответствующей дискретной системы собственные числа оказываются во внешности единичного круга, то переходный процесс будет неустойчивым, как показано на рис. 8.4, з.

*Метод корневого годографа* используют для анализа качества процессов дискретной системы, параметры которой могут выбираться. Корневой годограф как геометрическое место корней характеристического уравнения дискретной системы на  $z$ -комплексной плоскости в зависимости от изменения некоторого параметра позволяет судить не только о самом факте устойчивости, но и о запасах устойчивости и отдельных показателях качества процессов управления.

Поскольку характеристический многочлен является рациональным полиномом относительно  $z$ , то правила построения корневого годографа на  $s$ -плоскости могут быть применимы и в случае построения корневого годографа дискретной системы на  $z$ -плоскости.

Аналитический аппарат исследования качества процессов управления малоэффективен при изучении поведения дискретной системы в интервалах между моментами квантования, при исследовании так называемых *скрытых колебаний в системе*, при анализе зависимости свойств системы от периода квантования.

Для решения таких задач эффективным средством оказывается моделирование с использованием специализированных интерактивных моделирующих программных пакетов (см. А.4).

### Примеры:

1. Управляемый процесс имеет дискретную внешнюю модель в виде

$$G(z) = k_0 \frac{1 - e^{-\frac{h}{T_0}}}{z - e^{-\frac{h}{T_0}}},$$

где  $T_0$  — постоянная времени процесса.

Регулятор системы настроен так, что постоянная времени замкнутой системы  $T = 0,33T_0$ .

Определить установившуюся ошибку при обработке системой линейного сигнала  $u(t) = 2t$ , если  $h = 0,05$  с;  $T_0 = 0,3$  с;  $k_0 = 7$ .

Разомкнутая часть системы имеет передаточную функцию

$$W(z) = k_0 k_1 \frac{1 - e^{-\frac{h}{T_0}}}{z - 1},$$

поэтому передаточная функция замкнутой системы, в которой

$$k = k_0 k_1 \left(1 - e^{-\frac{h}{T_0}}\right), \quad e^{-\frac{h}{T}} = 1 - k.$$

По условиям задачи определяем коэффициент усиления

$$k = 1 - e^{-0,5} = 0,393$$

и коэффициент передачи регулятора  $k_0 = 0,366$ .

Таким образом, система полностью определена, ее передаточная функция

$$H(z) = \frac{0,393}{z - 0,607}.$$

Установившуюся ошибку находим из ее  $Z$ -преобразования

$$E(z) = \mathcal{Z}[2t]H_e(z) = \frac{2hz}{(z-1)^2}(1-H(z)):$$

$$e^\circ = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z) = 0,254.$$

**2.** Определить переходную характеристику и оценить качество управления для дискретной системы, структура которой (см. рис. 3.1) содержит идеальный квантователь с периодом квантования  $h = 0,1$  с, экстраполятор нулевого порядка

$$W_f(s) = \frac{1 - e^{-hs}}{s}$$

и объект управления  $W_0(s) = \frac{45}{s(s+4)}$ .

Передаточная функция разомкнутой части системы имеет вид

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{W(s)}{s} \right] \right],$$

поэтому

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \frac{45}{16} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s+4} + \frac{4}{s^2} - \frac{1}{s} \right] \right] =$$

$$= \frac{45}{16} \frac{z-1}{z} \left( \frac{z}{z - e^{-4h}} + \frac{4hz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} \right) =$$

$$= 0,197 \frac{z + 0,885}{z^2 - 1,475z + 0,844}.$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = 0,197 \frac{z + 0,885}{z^2 - 1,473z + 0,844}.$$

Для определения переходной характеристики найдем в рекуррентной форме реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = 0,197 \frac{z^{-1} + 0,885z^{-2}}{1 - 1,473z^{-1} + 0,844z^{-2}},$$

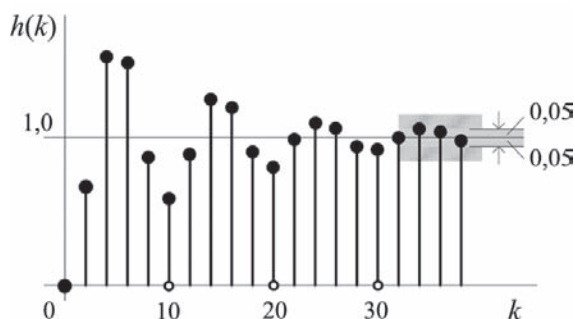


Рис. 8.5

Переходный процесс в дискретной системе

поэтому справедливо соотношение

$$Y(z)(1 - 1,473z^{-1} + 0,844z^{-2}) = 0,197U(z)(z^{-1} + 0,885z^{-2}).$$

Откуда находим, что

$$y(k) = 1,473y(k-1) - 0,844y(k-2) + 0,197u(k-1) + 0,174u(k-2).$$

В табл. 8.1 приведены результаты счета, а на рис. 8.5 показана переходная характеристика системы.

Таблица 8.1

$k$	$y(k)$	$k$	$y(k)$	$k$	$y(k)$	$k$	$y(k)$
0	0	10	0,57	20	0,82	30	0,92
2	0,66	12	0,90	22	0,98	32	1,00
4	1,55	14	1,26	24	1,12	34	1,05
6	1,51	16	1,20	26	1,08	36	1,03
8	0,85	18	0,91	28	0,95	38	0,98

Время достижения  $t_1 = 0,3$  с, время регулирования с точностью 0,95 равно  $t_p = 2,8$  с, перерегулирование составило  $\sigma = 55\%$ , переходная характеристика имеет три максимума, первый максимум наступает на  $t_m = 0,4$  с.

**3.** Найти установившиеся ошибки при обработке ступенчатого и линейного сигналов дискретной системой, если ее разомкнутая часть имеет передаточную функцию

$$W(z) = k_0 \frac{(1 - e^{-h})}{(z-1)(z - e^{-h})}.$$

Передаточная функция ошибки замкнутой системы

$$H_e(z) = \frac{1}{1 + W(z)} = \frac{1}{\frac{(z-1)(z - e^{-h})}{(z-1)(z - e^{-h}) + k_0(1 - e^{-h})}},$$

поэтому

$$\lim_{z \rightarrow 1} \alpha_0 H_e(z) = 0$$

при обработке ступенчатого воздействия установившаяся ошибка равна нулю, а установившаяся ошибка обработки линейного воздействия равна  $\alpha_1 h/k_0$ .

Этот же результат можно получить, используя универсальный метод коэффициентов ошибок.

В нашем случае

$$H_e^*(s) = \frac{(e^{sh} - 1)(e^{sh} - e^{-h})}{(e^{sh} - 1)(e^{sh} - e^{-h}) + k_0(1 - e^{-h})} = c_0 + c_1 s + 0,5c_2 s^2 + \dots,$$

поэтому

$$\begin{aligned} (e^{sh} - 1)(e^{sh} - e^{-h}) &= \\ &= (e^{sh} - 1)(e^{sh} - e^{-h}) + k_0(1 - e^{-h})(c_0 + c_1 s + 0,5c_2 s^2 + \dots), \end{aligned}$$

иначе

$$\begin{aligned} (sh + 0,5(sh)^2 + \dots)(1 - e^{-h} + sh + 0,5(sh)^2 + \dots) &= \\ = (sh + 0,5(sh)^2 + \dots)((1 - e^{-h} + sh + 0,5(sh)^2 + \dots) &+ \\ + k_0(1 - e^{-h}))(c_0 + c_1 s + 0,5c_2 s^2 + \dots). \end{aligned}$$

Находим соотношение для свободных членов:  $k_0(1 - e^{-h})c_0 = 0$  и коэффициентов при

$$sh: (1 - e^{-h}) = (1 - e^{-h})c_0 + k_0(1 - e^{-h})\frac{c_1}{h}.$$

Откуда находим, что  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = h/k_0$ .

**4.** Построить корневой годограф для дискретной системы, непрерывная часть которой имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{k_0}{s(s+1)}, \quad k_0 = \text{var.}$$

Система имеет идеальный квантователь на входе непрерывной части.

Дискретная передаточная функция разомкнутой части системы

$$W(z) = \frac{k_0 z(1 - e^{-h})}{(z - 1)(z - e^{-h})}.$$

После замыкания дискретная система имеет характеристическое уравнение

$$(z - 1)(z - e^{-h}) + k_0 z(1 - e^{-h}) = 0,$$

в котором параметр  $k_0$  входит линейно, что позволяет построить траекторию корней при изменении этого параметра. Начальное множество корней годографа  $\{1, e^{-h}\}$ , конечное —  $\{0\}$ . У системы два полюса и один нуль, поэтому один из корней годографа уйдет в бесконечность по действительной оси. При некоторых значениях параметра в системе может быть дважды пара кратных корней (положительных и отрицательных). Корневой годограф системы изображен на рис. 8.6.

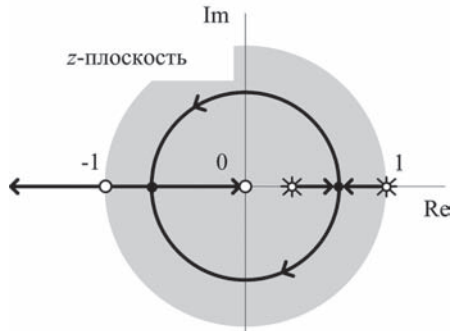


Рис. 8.6

Корневой годограф дискретной системы

5. Построить корневой годограф системы, которая задана дискретной передаточной функцией своей разомкнутой части:

$$W(z) = \frac{k_0(z + 0,8)}{(z - 1)(z - 0,5)}.$$

Система имеет два полюса  $\{\pi_1 = 1, \pi_2 = 0,5\}$  и один нуль в точке  $-0,8$ . При  $k > 0$ , годограф заполняет отрезок  $[0,5; 1]$  и полуось левее точки  $-0,8$ .

Годограф начинается на действительной оси в точках 1 и 0,5. С ростом  $k$  две его ветви движутся навстречу до точки кратности, после чего годограф двумя симметричными дугами перемещается в другую точку кратности, затем один луч направляется в точку  $-0,8$ , а другой по действительной полуоси в  $-\infty$ .

Точки кратности определяют из выражения

$$A(z) \frac{dB(z)}{dz} - \frac{dA(z)}{dz} B(z) = 0,$$

в котором  $A(z) = (z - 1)(z - 0,5)$ ,  $B(z) = (z + 0,8)$ . В данном случае это выражение принимает вид  $-1,2z^2 - 1,3z + 1,6 = 0$ , откуда находим две точки кратности: 0,734 и  $-1,87$ . Поскольку годограф (см. рис. 8.7) покидает единичный круг, система теряет устойчивость. Определить условия, при которых система выходит на границу устойчивости, можно по критерию Джурри.

## 8.5. УПРАЖНЕНИЯ

1. Являются ли управляемыми и наблюдаемыми системы:

- $$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} u(k);$$

$$y(k) = (1 \ 2) \mathbf{x}(k);$$

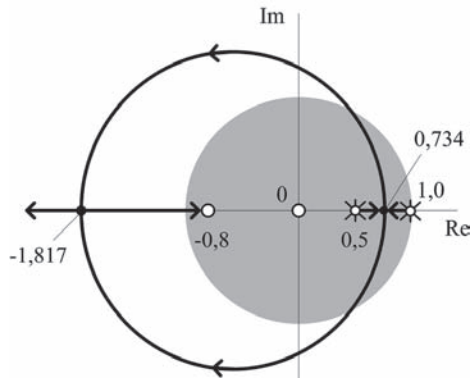


Рис. 8.7

Корневой годограф дискретной системы с известной передаточной функцией разомкнутой части

$$\bullet \quad \mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k);$$

$$y(k) = (1 \ 1 \ 2) \mathbf{x}(k).$$

2. Найти управляющую последовательность, переводящую систему

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

из начального состояния  $\mathbf{x}(0) = (2 \ 1 \ -1)^T$  в начало координат за три шага.

3. Будут ли асимптотически устойчивыми системы, заданные характеристическими полиномами:

- $\lambda^2 - \lambda + 0,16;$
- $\lambda^3 - 0,216;$
- $\lambda^3 + 0,9\lambda^2 + 0,28\lambda - 0,49.$

Ответ получить непосредственным вычислением характеристических корней.

4. Использовать критерии Рауса–Гурвица и Джюри для определения устойчивости систем, имеющих характеристические полиномы, приведенные в упражнения 3.

5. Найти коэффициент передачи  $k_0$ , при котором дискретная система с заданной передаточной функцией будет асимптотически устойчивой:

- $W(z) = \frac{k_0}{z(z-0,8)(z-0,4)};$
- $W(z) = \frac{k_0(z-0,25)}{z(z-0,3)(z-0,5)}.$

6. Построить годограф Найквиста для дискретной системы с передаточной функцией разомкнутого тракта

$$G(z) = \frac{1}{z - 0,4}.$$

7. Построить переходный процесс и оценить качество управления для системы

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ -1 & 0,6 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,9 \end{pmatrix} u(k);$$

$$y(k) = (1 \ 2) \mathbf{x}(k).$$

Найти  $y(3)$  для этой системы, если:

$$y(1) = 3, u(1) = 4; y(2) = 8, u(2) = -2.$$

8. Найти значение установившейся ошибки для системы с передаточной функцией прямого тракта

$$G(z) = \frac{(z - 0,4)}{(z - 0,7)(z - 1)},$$

если входной сигнал:

- единичный ступенчатый;
- единичный линейный.

9. Построить корневой годограф системы, которая задана дискретной передаточной функцией разомкнутой части:

- $G(z) = \frac{k_0(z + 0,8)}{(z - 1)(z - 0,5)}$ ;
- $G(z) = \frac{k_0(z + 1)}{(z - 1)^2}$ .

Построить корневой годограф дискретной системы с характеристическим полиномом

$$0,81z^2 + (200h^2 + 70h - 2)z + (200h^2 - 70h + 2).$$

10. Выполнить моделирование процессов в системе с передаточной функцией разомкнутой части:

$$G(z) = \frac{z + 1}{z^2 + 0,2z + 1}.$$

подобрать период квантования, при котором в системе возникают скрытые колебания,

$$G(z) = \frac{0,03(z + 0,867)}{z^2 - 1,654z + 0,683},$$

замкнуть систему с использованием управления

- $u(k) = k_0(u_0 - y(k));$
- $u(k) = k_0(u_0 - y(k)) - k_1u(k - 1).$

Исследовать поведение процессов в системе между моментами квантования в зависимости от  $k_0$ . Подобрать  $k_0, k_1$  так, чтобы процесс установился на уровне ступенчатого задания  $u_0$  за два или три шага.



# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

- Устойчивость движений нелинейной системы в малом
- Анализ устойчивости нелинейной системы в большом и в целом
- Абсолютная устойчивость нелинейных систем управления
- Периодические процессы в нелинейных системах
- Анализ качества нелинейных систем управления
- Упражнения

## 9.1. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В МАЛОМ

Движения нелинейных систем гораздо более сложные и многообразные, чем движения линейных систем. Фазовые портреты нелинейных систем в общем случае неоднородны, могут иметь более чем одну точку покоя, изолированные замкнутые кривые и различные особенности, поэтому анализ устойчивости нелинейных систем оказывается более сложным, чем анализ устойчивости линейных систем.

Понятия устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову, введенные в гл. 5, позволяют анализировать движения системы в окрестности положения покоя. Эти определения характеризуют свойство *устойчивости в малом* нелинейной системы, однако они не позволяют определять границы области устойчивости. Поэтому вводятся понятия *устойчивости в большом* и *устойчивости в целом*.

Для анализа устойчивости отдельных траекторий используют понятие *равномерной асимптотической устойчивости движения*, а для анализа замкнутых траекторий — понятие *орбитальной асимптотической устойчивости*.

Задачи об устойчивости замкнутых нелинейных систем автоматического управления при любых возмущениях и любых нелинейностях решают с использованием понятия *абсолютной устойчивости*.

Анализ устойчивости нелинейной системы по уравнениям первого приближения был первым и основным инженерным методом исследования, однако этот метод иногда допускает ошибочные заключения об устойчивости.

На рис. 9.1 приведен фазовый портрет нелинейной системы канонической структуры, для которой

$$\Phi(\varepsilon) = \text{sat } \varepsilon, \quad W(s) = \frac{5}{(s-1)(s+3,5)}.$$

Система асимптотически устойчива по первому приближению в окрестности начала координат, но в целом не является устойчивой.

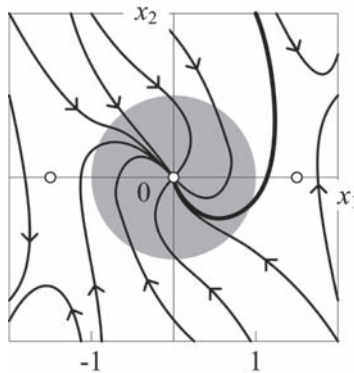


Рис. 9.1

Фазовый портрет нелинейной системы локально асимптотически устойчивой, но в целом неустойчивой

Пусть движение нелинейной системы описывают уравнения

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha x_2 + \alpha x_1 \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}, \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1 + \alpha x_2 \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)},\end{aligned}$$

где  $\alpha$  — параметр системы.

Уравнения первого приближения этой системы имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha x_2, \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1.\end{aligned}$$

Если судить по первому приближению, то фазовый портрет системы по классификации Пуанкаре — *центр*. Однако реальный фазовый портрет совсем не таков! В самом деле, уравнения движения нелинейной системы в полярных координатах приводят к виду

$$\dot{r} = \alpha r^2; \quad r(0) = r_0,$$

поэтому его решение  $r = \frac{r_0}{1 - \alpha r_0 t}$ .

Если параметр положителен, тогда фазовая точка с ростом времени бесконечно удаляется от начала координат, если  $\alpha < 0$ , то фазовая точка с ростом времени бесконечно приближается к началу координат. В первом случае движение неустойчиво, во втором — асимптотически устойчиво.

А. М. Ляпунов первым описал условия, когда анализ устойчивости по первому приближению дает правильный ответ.

Рассмотрим автономную нелинейную систему  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  и ее точку покоя  $\mathbf{x}^*$ . Пусть

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* + \delta \mathbf{x}(t),$$

где  $\delta \mathbf{x}(t)$  — возмущение  $\mathbf{x}^*$ .

Найдем уравнение для возмущенного движения.

Ясно, что

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}(t)).$$

Разложим в ряд Тейлора функцию  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x})$  в окрестности точки покоя

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^*)\delta\mathbf{x} + o(\delta\mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$  — **матрица Якоби** функции  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}^*$ .

Таким образом, *уравнение возмущенного движения — первое приближение нелинейного уравнения* можно представить в виде линейного дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}^*)\delta\mathbf{x}(t).$$

**Теорема** (А. М. Ляпунов, 1892). *Если вещественные части всех собственных чисел матрицы  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$  первого приближения системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  отрицательны, то положение равновесия  $\mathbf{x}^*$  является асимптотически устойчивым.*

*Если среди собственных чисел матрицы  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$  первого приближения системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  найдется хотя бы одно с положительной вещественной частью, то положение равновесия  $\mathbf{x}^*$  — неустойчиво.*

*Если среди собственных чисел матрицы  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$  первого приближения системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  найдется хотя бы одно с нулевой вещественной частью, а остальные с отрицательной, то устойчивость положения равновесия  $\mathbf{x}^*$  по первому приближению даже в малом установить нельзя.*

### Примеры:

**1.** Исследовать устойчивость в малом особых точек системы первого порядка  $\dot{x} = \sin x$ .

Система имеет счетное множество точек покоя  $\{\pi k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ .

В точках  $\{\pi(2k + 1)\}$  имеет место локальная асимптотическая устойчивость, поскольку в этих точках собственное число системы отрицательное, равно  $-1$ . В точках  $\{2\pi k\}$  собственное число системы равно  $1$ , поэтому в этих точках имеет место неустойчивость в малом.

**2.** Нелинейная система канонической структуры, для которой

$$\Phi(\varepsilon) = \text{sat } \varepsilon, \quad W(s) = \frac{5}{(s-1)(s+3,5)}$$

имеет, как показано на рис. 9.1, три особые точки:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1,43 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1,43 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Исследовать устойчивость в малом особых точек системы.

Уравнения невозмущенного движения системы в координатах состояния имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = 3,5x_1 - 2,5x_2 - 5\text{sat } x_1.$$

В окрестности точки  $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  уравнения первого приближения имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -1,5x_1 - 2,5x_2.\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение этой системы  $\lambda^2 + 2,5\lambda + 1,5 = 0$ , ее собственные числа — действительные отрицательные:  $\{-1,0; -1,5\}$ . Поэтому положение равновесия асимптотически устойчиво.

В окрестностях точек  $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \pm 1,43 \\ 0 \end{pmatrix}$  уравнения первого приближения имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= 3,5x_1 - 2,5x_2.\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение этой системы  $\lambda^2 + 2,5\lambda - 3,5 = 0$ , ее собственные числа — действительные и разного знака:  $\{1,0; -3,5\}$ . Поэтому положение равновесия неустойчиво.

### 3. Нелинейная система

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha x_2 + \alpha x_1 \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}, \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1 + \alpha x_2 \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}\end{aligned}$$

имеет единственную точку покоя — начало координат. Исследовать устойчивость в малом движения системы в окрестности особой точки.

Матрица Якоби в этой точке имеет вид  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ , поэтому характеристическое уравнение первого приближения  $\lambda^2 + \alpha^2 = 0$  имеет мнимые корни:  $\{\pm j\alpha\}$ . Судить об устойчивости или неустойчивости особой точки по первому приближению нельзя.

4. Исследовать устойчивость в малом положения равновесия системы:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -2x_1^3.\end{aligned}$$

Положение равновесия системы — начало координат. Матрица Якоби системы

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6x_1^2 & 0 \end{pmatrix}$$

в точке покоя имеет два нулевых собственных числа, поэтому судить об устойчивости в малом по теореме Ляпунова нельзя. Однако в данном случае можно построить фазовый портрет системы и по нему оценить устойчивость особой точки.

Уравнение фазовых кривых

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{2x_1^3}{x_2},$$

поэтому после его интегрирования получим  $x_1^4 + x_2^2 = C^2$ .

Фазовые кривые являются замкнутыми овалами, при этом ни одна кривая при  $t \rightarrow \infty$  не удаляется и не приближается к началу координат, следовательно, положение равновесия устойчиво, но не асимптотически.

**5.** Исследовать устойчивость в малом положения равновесия системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= \sin(x_1 + x_2).\end{aligned}$$

Точки покоя системы представляются множеством

$$\{(\pm\pi k \ 0)^T, k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Матрица Якоби системы

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x_1 + x_2) & \cos(x_1 + x_2) \end{pmatrix},$$

поэтому в точках покоя  $\{(\pm 2\pi k \ 0)^T, k = 0, 1, 2, \dots\}$  якобиан принимает вид

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа этой матрицы:  $\{0, 6; -1, 6\}$  — действительные и разного знака, следовательно, в исследуемых точках покоя имеет место локальная неустойчивость движений типа *седло*.

Матрица Якоби в точках покоя

$$\{(\pm\pi(2k+1) \ 0)^T, k = 0, 1, 2, \dots\}$$

принимает вид  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Собственные числа этой матрицы:  $\{-0,5 \pm j0,866\}$  — левая комплексная пара, следовательно, в исследуемых точках покоя имеет место локальная асимптотическая устойчивость движений типа *фокус* по классификации Пуанкаре.

## 9.2. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В БОЛЬШОМ И В ЦЕЛОМ

**Определение.** Положение равновесия  $\mathbf{x}^*$  системы *асимптотически устойчиво в большом* по отношению к области  $G$ , если  $\mathbf{x}^*$  устойчиво и всякая траектория, которая начинается в  $G$  стремится к  $\mathbf{x}^*$  с ростом времени.

Если при этом  $G$  совпадает со всем фазовым пространством, то имеет место **асимптотическая устойчивость в целом**.

Фундаментальным методом исследования устойчивости движения является *второй метод Ляпунова*, основное достоинство которого состоит в том, что он позволяет судить об устойчивости не отыскивая при этом точного движения нелинейной системы.

В основе метода Ляпунова лежит аналитическое обобщение физического факта: *при движении к положению равновесия полная энергия устойчивой автономной системы уменьшается, достигая минимума в точке покоя*.

**Определение.** Скалярную функцию векторного аргумента  $V(\mathbf{x})$  непрерывную вместе со своими первыми частными производными в некоторой области  $G$ , содержащей начало координат, называют функцией Ляпунова системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , если  $V(\mathbf{x})$  в области  $G$  является положительно определенной и ее полная производная по времени в силу этой системы  $\dot{V}(\mathbf{x})$  является в области  $G$  отрицательно полуопределенной.

Полную производную по времени функции  $V(\mathbf{x})$  в силу системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  находят по формуле

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \text{grad}^T V(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = \text{grad}^T V(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Полная производная по времени в силу системы позволяет проследить за движением фазовой точки системы, поскольку представляет собой проекцию вектора фазовой скорости на направление градиента функции  $V(\mathbf{x})$ .

Пусть, например, в данный момент времени фазовая точка находится на поверхности функции  $V(\mathbf{x}) = C$  и  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ . Из этого следует, что функция  $V(\mathbf{x})$  убывает, значит фазовая точка переходит во внутрь поверхности  $V(\mathbf{x}) = C$ .

С другой стороны, так как  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  скалярное произведение вектора фазовой скорости и градиента отрицательно, то проекция вектора фазовой скорости направлена в сторону противоположную градиенту. Но ведь вектор градиента совпадает с внешней нормалью к поверхности  $V(\mathbf{x}) = C$ , значит фазовая точка будет двигаться во внутрь этой поверхности.

**Теоремы (А. М. Ляпунов, 1892)**

**1. Об устойчивости в большом.** Если в некоторой ограниченной области  $G$ , включающей начало координат  $\mathbf{F}(0) = 0$ , для системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  существует ограниченная функция Ляпунова этой системы, то начало координат устойчиво в большом относительно области  $G$ .

**2. Об асимптотической устойчивости в большом.** Если в условиях первой теоремы кроме того  $\dot{V}(\mathbf{x})$  отрицательно определенная в  $G$ , то начало координат асимптотически устойчиво в большом относительно области  $G$ .

**3. О неустойчивости.** Если для системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  существует в области  $G$  непрерывная со своими частными производными функция  $V_1(\mathbf{x})$  такая, что  $V_1(0) = 0$ , а ее производная по времени  $\dot{V}_1(\mathbf{x})$  — положительно определенная функция вдоль любых траекторий системы, но при этом в любой окрестности начала координат  $V_1(\mathbf{x})$  не является отрицательно полуопределенной, то начало координат системы неустойчиво.

**Теорема** (Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский, 1952). **Об устойчивости в целом.** Если для системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  во всем фазовом пространстве  $R^n$  существует функция Ляпунова  $V_1(\mathbf{x})$  такая, что  $V_1(\mathbf{x})$  бесконечно растет с удалением от начала координат и ее производная по времени в силу системы отрицательно определенная, то начало координат системы асимптотически устойчиво в целом.

**Примеры:**

**1.** Выполнить анализ устойчивости движения математического маятника в окрестности положения покоя.

Движение математического маятника в пустоте описывает пара уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 \sin x_1.\end{aligned}$$

Для анализа устойчивости точки покоя определим функцию Ляпунова как функцию, пропорциональную полной энергии маятника

$$V(x_1, x_2) = 0,5x_2^2 + \omega^2(1 - \cos x_1).$$

Эта функция — непрерывная, ее первые частные производные непрерывны в области  $G = \{(x_1, x_2) : |x_1| < 2\pi\}$  функция  $V(x_1, x_2)$  положительно определенная. Полная производная по времени этой функции в силу системы равна нулю везде в  $G$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = (\omega^2 \sin x_1)x_2 + x_2(-\omega^2 \sin x_1) = 0.$$

Значит  $\dot{V}(x_1, x_2)$  — отрицательно полуопределенная в  $R$ . Следовательно, для модели маятника построена функция Ляпунова и этим доказана устойчивость в области  $G$  точки покоя этой системы.

**2.** Выполнить анализ устойчивости движения математического маятника в демпфирующей среде. Движение математического маятника в демпфирующей среде описывают два уравнения

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\zeta x_2 - \omega^2 \sin x_1, \quad \zeta > 0.\end{aligned}$$

Воспользуемся функцией Ляпунова в виде

$$V(x_1, x_2) = 0,5x_2^2 + \omega^2(1 - \cos x_1).$$

Находим полную производную по времени в силу системы

$$\dot{V}(x_1, x_2) = (\omega^2 \sin x_1)x_2 + x_2(-\zeta x_2 - \omega^2 \sin x_1) = -\zeta x_2^2.$$

Эта функция всюду в  $G$  отрицательно определенная, следовательно, начало координат системы асимптотически устойчиво в большом в этой области.

**3.** Выполнить анализ устойчивости движения нелинейной системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha x_2 + \alpha x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1 + \alpha x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\end{aligned}$$

в области, содержащей точку покоя.

Выберем в качестве функции Ляпунова положительно определенную функцию

$$V(x_1, x_2) = 0,5(x_1^2 + x_2^2).$$

Вычислим ее полную производную по времени в силу системы. Имеем

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= x_1(-\alpha x_2 + \alpha x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_2(\alpha x_1 + \alpha x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2})) = \\ &= \alpha(x_1^2 + x_2^2) \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

Теперь можно определенно утверждать, что положение покоя  $(0 \ 0)^T$  при отрицательном  $\alpha$  асимптотически устойчиво, а при  $\alpha$  положительном — неустойчиво. Заметим, что при  $\alpha < 0$  выполняются условия не только теоремы Ляпунова, но и теоремы Барбашина–Красовского, следовательно, положение покоя системы асимптотически устойчиво в целом.

**4.** Исследовать устойчивость системы стабилизации положения космического аппарата на орбите, управляемое движение которого описывают нелинейные уравнения

$$\begin{aligned} J_1 \dot{x}_1 &= (J_2 - J_3)x_2x_3 - k_1x_1, \\ J_2 \dot{x}_2 &= (J_3 - J_1)x_1x_3 - k_2x_2, \\ J_3 \dot{x}_3 &= (J_1 - J_2)x_1x_2 - k_3x_3 \end{aligned}$$

и стабилизацию, осуществляют путем приложением управляющих моментов, пропорциональных угловым скоростям.

Уравнения движения удобнее записать в матричной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{J_1} & \frac{J_2}{J_1}x_3 & -\frac{J_3}{J_1}x_2 \\ -\frac{J_1}{J_2}x_3 & -\frac{k_2}{J_2} & \frac{J_3}{J_2}x_1 \\ -\frac{J_1}{J_3}x_2 & \frac{J_2}{J_3}x_1 & -\frac{k_3}{J_3} \end{pmatrix}.$$

Положение покоя в этой системе — начало координат. Выберем функцию Ляпунова в виде положительно определенной квадратичной формы

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T, \quad \mathbf{Q} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3).$$

Вычислим производную по времени этой функции в силу системы

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T(\mathbf{x}) \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T(\mathbf{x}) \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{x})) \mathbf{x}.$$

Обозначим  $\mathbf{A}^T(\mathbf{x}) \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\mathbf{P}$ .

Видим, что функция  $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$  оказывается вновь квадратичной формой, у которой матрица

$$\mathbf{P} = \text{diag}(2k_1J_1, \quad 2k_2J_2, \quad 2k_3J_3),$$

очевидно, является положительно определенной.



Условия теоремы Ляпунова выполняются и поэтому система стабилизации имеет асимптотически устойчивое положение равновесия. Кроме того, с неограниченным удалением  $\mathbf{x}$  от начала координат бесконечно растут значения функции  $V(\mathbf{x})$ , поэтому на основании теоремы Барбашина–Красовского система асимптотически устойчива в целом при любом возмущении.

5. Движение нелинейной системы управления описывают уравнения

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 - x_2 + x_1x_2 - 0,5x_1x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= -3x_2 + x_1x_2 + x_1^2x_2 - 0,5x_1x_2^2.\end{aligned}$$

Исследовать устойчивость точки покоя системы в большом, используя в качестве функции Ляпунова функцию

$$V(x_1, x_2) = 0,5(3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2).$$

Функция  $V(x_1, x_2)$  является непрерывной вместе со своими производными во всем пространстве  $R^2$ , эта функция является квадратичной формой

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x},$$

поэтому проверить свойство положительной определенности можно по критерию Сильвестра.

Матрица

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

квадратичной формы удовлетворяет критерию Сильвестра положительной определенности, поскольку два главных минора этой матрицы положительны.

Полная производная по времени функции  $V(x_1, x_2)$  в силу системы принимает вид

$$\dot{V}(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2)\dot{x}_1 - (x_1 - x_2)\dot{x}_2 = -3x_1^4 + 2x_1^2x_2 - 2x_2^2.$$

Это выражение является квадратичной формой относительно переменных

$$(x_1^2, x_2),$$

поэтому ее свойство знакоопределенности можно определить вновь по критерию Сильвестра.

Матрица квадратичной формы в данном случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Два главных минора этой матрицы разного знака, значит критерий Сильвестра отрицательной определенности выполняется, следовательно, полная производная по времени функции Ляпунова в силу системы оказывается отрицательно определенной.

Положение покоя системы асимптотически устойчиво в большом и даже в целом, поскольку выполняются условия теоремы Барбашина–Красовского.

### 9.3. АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим класс нелинейных систем управления канонической структуры, у которых  $u(t) \equiv 0$  линейная часть имеет передаточную функцию  $W(s)$ , а нелинейное звено имеет характеристику  $\Phi(\varepsilon)$ , которая нечетна и заключена в угле между прямыми  $k_1, k_2$ . Последнее условие означает, что

$$\Phi(0) = 0, \quad 0 \leq k_1 \leq \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq k_2.$$

Задача анализа нелинейной системы, состоящая в том, чтобы найти необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в целом положения равновесия системы независимо от вида нелинейной характеристики  $\Phi(\varepsilon)$ , была сформулирована А. И. Лурье и В. И. Постниковым (1944).

Эту задачу, названную задачей Лурье *абсолютной устойчивости*, решали на основе прямого метода Ляпунова М. А. Айзерман, А. М. Лётов, Ж. Ла-Салль, С. Лефшец.

Другой путь решения проблемы абсолютной устойчивости был предложен румынским математиком В.-М. Поповым (1959). Им на основе частотных методов были сформулированы критерии абсолютной устойчивости для большого класса систем. Развитие метода В.-М. Попова для дискретных систем управления осуществили Я. З. Цыпкин, Б. Н. Наумов, Э. Джури.

Задача Лурье может быть сформулирована несколько иначе: *найти все множество нелинейных характеристик системы управления, для которых функция  $V(\mathbf{x})$  некоторого частного вида является функцией Ляпунова этой системы.*

Довольно часто функцию  $V(\mathbf{x})$  представляют в виде суммы положительно определенной квадратичной формы от координат состояния и интеграла от нелинейной характеристики.

Класс систем, для которых решается задача Лурье, представлен двумя группами: системы прямого регулирования, как показано на рис. 4.1, и системы непрямого регулирования, в которых нелинейность и исполнительный орган охвачены обратной связью, например, как показано на рис. 9.2.

После введения координат состояния:  $(\mathbf{x}, \varepsilon)$  модель такой системы непрямого регулирования описывается уравнениями (*S. Lefschetz*) :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}z, \\ z &= \Phi(\varepsilon), \\ \dot{\varepsilon} &= y - \beta z, \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Найдем условия абсолютной асимптотической устойчивости этой системы, используя метод Лурье.

Введем функцию Ляпунова в виде

$$V(\mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \int_0^\varepsilon \Phi(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (9.2)$$

где  $\mathbf{Q}$  — произвольная симметрическая, положительно определенная матрица.

Найдем полную производную по времени этой функции в силу системы Лefшица

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{x}} + \Phi(\varepsilon) \dot{\varepsilon} = -\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{R} \mathbf{x} - 2\Phi(\varepsilon) \mathbf{G}^T \mathbf{x} - \Phi^2(\varepsilon), \quad (9.3)$$

где  $\mathbf{R} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A})$ ,  $\mathbf{G} = \mathbf{Q} \mathbf{B} + 0,5 \mathbf{C}$ .

Представим  $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$  в квадратичной форме:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \varepsilon) = (\mathbf{x}, \Phi(\varepsilon)) \begin{pmatrix} -\mathbf{R} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G} & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \Phi(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

что позволит сформулировать условие отрицательной определенности этой функции, используя критерий Сильвестра.

Система непрямого регулирования (см. рис. 9.2, а), будет асимптотически устойчивой при любой нелинейности, если выполнены условия:

$$\beta > \mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}$$

и матрица  $\mathbf{R}$  — положительно определенная.

• Частотные методы анализа нелинейных систем управления, предложенные и развитые В.-М. Пóповым, оказались эффективным средством исследования абсолютной устойчивости для широкого класса нелинейных систем любого порядка непрерывных и дискретных, с запаздыванием и без него, с сосредоточенными и с распределенными параметрами. Рассмотрим нелинейную систему канонической структуры (см. рис. 4.1), у которой отсутствует входное воздействие, известна передаточная функция линейной части  $W(s)$  и характеристика нелинейности  $\Phi(\varepsilon)$ .

**Определение.** Система называется **абсолютно устойчивой в секторе**  $[k_1, k_2]$ , если ее положение равновесия асимптотически устойчиво в целом при любых начальных условиях и при любом выборе функции  $\Phi(\varepsilon)$ , удовлетворяющей условиям:

$$\Phi(0) = 0, \quad 0 \leq k_1 \leq \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq k_2.$$

В основе частотных критериев устойчивости Пóпова лежит доказанная им теорема, в которой формулируются достаточные условия и которая позволяет выводить суждения об абсолютной устойчивости нелинейной системы по частотной характеристике ее линейной части.

**Теорема** (В.-М. Пóров, 1959). Для того чтобы система была абсолютно устойчивой в секторе  $[0, k]$  достаточно, чтобы существовало такое действительное число  $q$ , при котором для всех значений  $\omega \geq 0$  выполнялось условие:

$$\operatorname{Re}((1 + jq\omega)W(j\omega)) + \frac{1}{k} > 0.$$

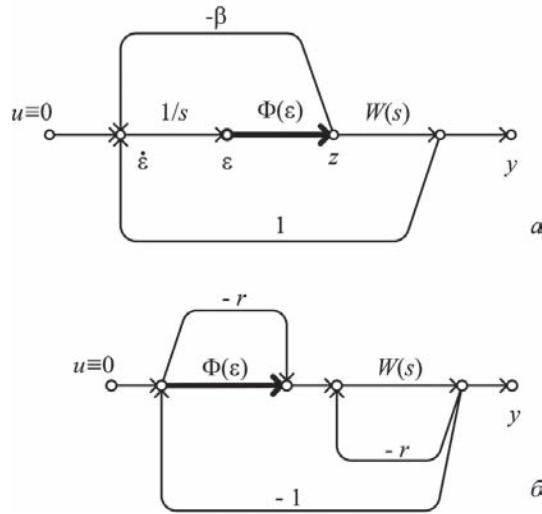


Рис. 9.2

Структура системы непрямого регулирования, в которой нелинейность и исполнительный орган охвачены обратной связью (а). Эквивалентное преобразование канонической структуры для сдвига полюсов влево (б)

Частотный критерий абсолютной устойчивости является геометрической интерпретацией основной теоремы.

Введем в рассмотрение, следуя Пóпову, помимо основной частотной характеристики  $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ , модифицированную частотную характеристику линейной части:

$$\tilde{W}(j\omega) = \tilde{U}(\omega) + j\tilde{V}(\omega),$$

где  $\tilde{U} = U$ ,  $\tilde{V} = \omega V$ .

Годографы модифицированной частотной характеристики  $\tilde{W}(j\omega)$  и основной частотной характеристики линейной части системы  $W(j\omega)$  пересекаются в точках, где  $\omega = 0$ ,  $\omega = 1$ , а также на действительной оси.

В терминах модифицированной частотной характеристики основное условие теоремы Пóпова примет вид

$$\operatorname{Re}((1 + jq\omega)(U + jV)) + \frac{1}{k} = U - q\omega V + \frac{1}{k} = \tilde{U} - q\tilde{V} + \frac{1}{k} > 0.$$

Уравнение

$$\tilde{U} - q\tilde{V} + \frac{1}{k} = 0$$

определяет на комплексной плоскости  $(\tilde{U}, j\tilde{V})$  критериальную прямую, проходящую через точку  $-\frac{1}{k}$  на действительной оси с угловым наклоном  $\frac{1}{q}$ . Эту прямую называют **прямой Пóпова**.

**Критерий Пóпова** (линейный). *Состояние равновесия нелинейной системы с асимптотически устойчивой линейной частью будет абсолютно устойчивым в секторе  $[0, k]$ , если модифицированный годограф ее линейной части не пересекает прямую Пóпова.*

Для нелинейной системы с нейтральной и даже неустойчивой линейной частью применение условий Пóпова возможно после преобразования сдвига полюсов влево, например, по схеме, показанной на рис. 9.2, б.

В новой структуре характеристика нелинейности и передаточная функция линейной части изменились:

$$\check{\Phi}(\varepsilon) = \Phi(\varepsilon) - r\varepsilon; \check{W}(s) = \frac{W(s)}{1 + rW(s)}.$$

Применим условия теоремы Пóпова к новой структуре

$$0 \leq \frac{\check{\Phi}(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq k - r; \operatorname{Re}((1 + jq\omega)\check{W}(j\omega)) + \frac{1}{k - r} > 0.$$

Раскроем это выражение

$$\check{W} = \frac{U + jV}{1 + rU + jrV} = \frac{(U(1 + rU) + rV^2) + j((1 + rU)V - rUV)}{(1 + rU)^2 + (rV)^2}$$

и подставим его в условие теоремы Пóпова.

После алгебраических преобразований получим новое выражение для условия абсолютной устойчивости:

$$U^2 + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{k}\right)U + V^2 - q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right)\omega V + \frac{1}{rk} > 0.$$

Это неравенство делит комплексную плоскость  $(\tilde{U}, j\tilde{V})$  на две области с критериальной границей — параболой, которая пересекает действительную ось в точках  $-\frac{1}{r}$ ,  $-\frac{1}{k}$  и имеет наклон касательных в этих точках соответственно  $\left(\frac{1}{q}, -\frac{1}{q}\right)$ .

Эту кривую называют **параболой Пóпова**.

**Критерий Пóпова** (параболический). *Состояние равновесия нелинейной системы с нейтральной и неустойчивой линейной частью будет абсолютно устойчивым в секторе  $[r, k]$ , если модифицированный годограф линейной части не пересекает параболу Пóпова.*

Заметим, что данный критерий справедлив при числе нулевых полюсов не более двух и правых полюсов не более одного.

Предложенный В.-М. Пóповым более мощный *круговой критерий*, свободен от этих ограничений и, кроме того, он формулируется в терминах основной частотной характеристики  $W(j\omega)$  линейной части системы. Круговой критерий является геометрической интерпретацией обобщенной теоремы об абсолютной устойчивости нелинейных систем.

Рассмотрим систему канонической структуры, у которой линейная часть, охватываемая отрицательной обратной связью с коэффициентом  $r$ , устойчива.

**Теорема** (V.-M. Рóров, 1962). Для того чтобы система канонической структуры была абсолютно устойчивой в секторе  $[r, k]$  достаточно существования такого действительного числа  $q$ , что для всех значений  $\omega \geq 0$  выполнялось условие:

$$\left| W(j\omega) + \frac{k+r-jq\omega(k-r)}{2kr} \right|^2 - \left( \frac{k-r}{2kr} \right)^2 (1+q^2\omega^2) > 0.$$

Геометрически обобщенное условие Пóпова делит для каждого значения комплексную плоскость на две области: внутренность и внешность *критериального круга* с центром в точке

$$\left( -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{k} \right), j\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{k} \right) q\omega \right),$$

который пересекает действительную ось в точках  $\left( -\frac{1}{r}, -\frac{1}{k} \right)$ .

Границу этого круга называют **окружностью Пóпова**.

**Критерий** (обобщенный). Состояние равновесия нелинейной системы будет абсолютно устойчивым в  $[r, k]$ , если для каждой частоты  $\omega \geq 0$  вектор  $W(j\omega)$  частотного годографа линейной части находится вне соответствующей окружности Пóпова.

Заметим, что если  $r$  исчезающе мало, то результаты анализа по обобщенному критерию практически совпадают с результатами по линейному критерию. Критериальные окружности имеют центры, которые смещаются вверх с увеличением произведения  $q\omega$ , но все окружности проходят через точки  $\left( -\frac{1}{r}, -\frac{1}{k} \right)$  на действительной оси. При  $q = 0$  критериальная окружность для всех симметрична относительно действительной оси.

Найденный допустимый раствор сектора, в котором может располагаться нелинейная характеристика, называют **сектором Пóпова**.

Заметим, что если нелинейность  $\Phi(\varepsilon)$  линеаризована, то максимальное значение коэффициента усиления такой *квазилинейной* системы определяет так называемый **гурвицев угол**. Для истинно линейной системы гурвицев угол соответствует предельному коэффициенту усиления.

Справедливо утверждение: *сектор Пóпова не превосходит гурвицев угол*.

В самом деле, если сектор Пóпова определяется точкой пересечения прямой Пóпова с действительной осью, то гурвицев угол — точкой пересечения годографа с действительной осью. Оба угла совпадают только тогда, когда прямая Пóпова и годограф пересекают действительную ось в одной точке.

Дальнейшим развитием частотных методов анализа абсолютной устойчивости нелинейных систем явился круговой критерий, предложенный Я.З. Цыпкиным и Б.Н. Наумовым для анализа абсолютной устойчивости вынужденных процессов в нелинейных системах со стационарной и нестационарной нелинейностью.

Круговой критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейной системе подобен обобщенному частотному критерию Найквиста для линейных систем с той лишь разницей, что в качестве индикатора выступает не точка  $(-1, 0)$ , а круг Пóпова

с центром на действительной оси в точке  $-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{k} \right)$ , который пересекает действительную ось в точках  $-\frac{1}{r}$  и  $-\frac{1}{k}$ .

**Критерий** (Я. З. Цыпкин, Б. Н. Наумов, 1964). *Вынужденные процессы в нелинейной системе будут абсолютно устойчивыми, если значения производной характеристики нелинейного элемента  $\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}$  лежат в секторе  $[r, k]$ , и годограф частотной характеристики  $W(j\omega)$  линейной части системы, не пересекая окружности Попова, охватывает ее в положительном направлении  $\frac{m}{2}$  раз, где  $m$  — число правых полюсов передаточной функции  $W(s)$ .*

### Примеры:

**1.** Исследовать условия устойчивости в системе с  $W(s) = \frac{1}{s^2}$  и нелинейным звеном с произвольной характеристикой  $\Phi(\varepsilon)$ .

Уравнения состояния системы имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\Phi(x_1).\end{aligned}$$

Построим функцию Ляпунова по схеме Лурье

$$V(x_1, x_2) = 0,5x_2^2 + \int_0^{x_1} \Phi(x_1) dx_1.$$

Вычислим полную производную по времени этой функции в силу системы

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \Phi(x_1)x_2 - x_2\Phi(x_1) = 0.$$

Условия теоремы Ляпунова выполнены, значит система устойчива в целом для любой нелинейности. Система абсолютно устойчива.

**2.** Найти условия абсолютной устойчивости системы, в которой линейная часть имеет передаточную функцию  $W(s) = \frac{1}{s(s+\alpha)}$  и нелинейность — произвольную характеристику  $\Phi(\varepsilon)$ .

Уравнения состояния системы принимают вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \Phi(x_1).\end{aligned}$$

Функцию Ляпунова та же, что и в примере 1. Найдем полную производную этой функции по времени в силу системы

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \Phi(x_1)x_2 - x_2(x_2 + \Phi(x_1)) = -x_2^2.$$

Для абсолютной асимптотической устойчивости системы достаточно, чтобы  $\alpha > 0$ .

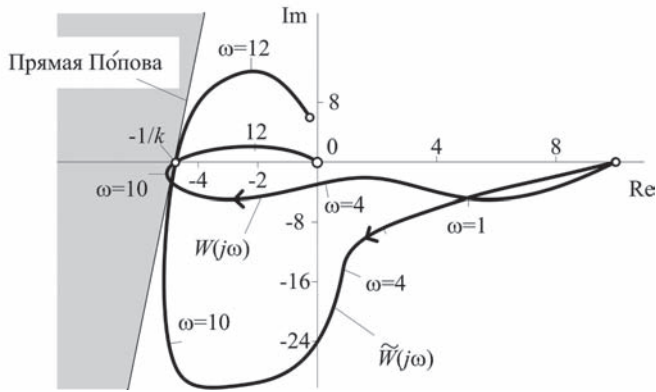


Рис. 9.3

Применение линейного критерия Попова к примеру 5

3. Найти условия абсолютной устойчивости системы непрямого регулирования (см. рис. 9.2), линейная часть которой имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}.$$

Введем координаты состояния так, что

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - \Phi(\varepsilon), \\ \dot{x}_2 &= x_2 + \Phi(\varepsilon), \\ y &= x_1 + x_2, \\ \dot{\varepsilon} &= x_1 + x_2 - \beta\Phi(\varepsilon), \end{aligned}$$

тогда  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = (1 \ 1)$ .

Положим, к примеру,  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ , что позволит найти матрицу  $\mathbf{Q}$  в функции Ляпунова. Из условия  $\mathbf{R} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A})$  находим, что  $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

Теперь можно определить матрицу  $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3,5 \end{pmatrix}$  и затем условие абсолютной устойчивости  $\beta > 3,0625$ .

4. Найти условия абсолютной устойчивости для нелинейной системы с линейной частью — звено второго порядка. Частотный годограф линейной части — выпуклая кривая, проходящая через начало координат, таков и модифицированный годограф, поэтому прямую Попова можно провести через начало координат. А это значит, что положение равновесия этой нелинейной системы асимптотически устойчиво с любой однозначной характеристикой нелинейного элемента.



5. Нелинейная система имеет асимптотически устойчивую линейную часть с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{10(0,05s + 1)}{(s + 1)(0,01s + 1)(0,01s^2 + 0,02s + 1)}.$$

Определить условия абсолютной устойчивости этой системы.

Вычислим основную и модифицированную частотные характеристики линейной части системы.

На рис. 9.3, *a* приведены годографы вычисленных характеристик и графически построена прямая Пóпова, которая проходит через точку  $-4,7$  на действительной оси. Следовательно, нелинейная система будет абсолютно устойчива в секторе  $[0; 0,213]$ .

Заметим, что в данном случае гурвицев угол и сектор Пóпова равны, годографы и прямая Пóпова пересекаются в одной точке на действительной оси. Область устойчивости нелинейной системы и соответствующей линейной системы совпадают.

6. Определить условия абсолютной устойчивости для нелинейной системы канонической структуры, линейная часть которой имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{20}{s(s + 1)(s^2 + s + 10)}.$$

Модифицированная частотная характеристика линейной части может быть вычислена по выражению

$$W(j\omega) = 20 \frac{(\omega^2 - 11) + j(2\omega^2 - 10)}{\omega^2(\omega^2 - 11)^2 + (2\omega^2 - 10)^2}.$$

На рис. 9.4, *a* представлен годограф модифицированной характеристики и прямая Пóпова. Определена величина  $-\frac{1}{k} = -1,3$ . Следовательно, положение покоя нелинейной системы будет абсолютно устойчиво для любой нелинейной характеристики, располагающейся в секторе  $[0, 0,76]$ .

Годограф пересекает действительную ось в точке  $-0,65$ , поэтому гурвицев угол составляет  $[0, 1,54]$ , что, очевидно, больше сектора Пóпова.

Запас устойчивости нелинейной системы меньше, чем у линейной.

7. Определить условия абсолютной устойчивости для нелинейной системы с неустойчивой линейной частью

$$W(s) = \frac{1}{(s - 1)(s + 2)(s + 5)}.$$

Для анализа абсолютной устойчивости можно применить параболический или обобщенный критерий Пóпова. Найдем коэффициент обратной связи для перемещения правого полюсы влево. Характеристическое уравнение замкнутой линейной части имеет вид

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda + (r - 10) = 0,$$

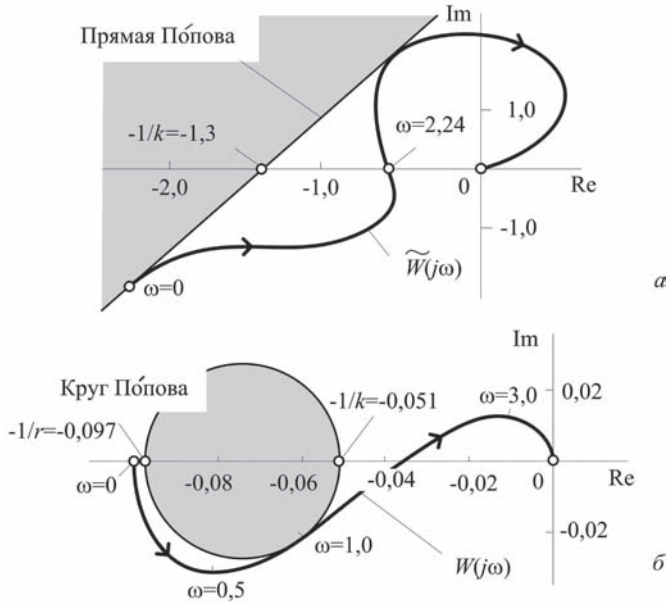


Рис. 9.4

Годограф модифицированной характеристики и прямая Попова нелинейной системы (а).  
 Применение кругового критерия Попова к примеру 7 (б)

поэтому матрица Гурвица принимает вид

$$H = \begin{pmatrix} 6 & r - 10 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & r - 10 \end{pmatrix},$$

поэтому замкнутая линейная часть будет асимптотически устойчивой, если  $10 < r < 28$ .

Частотный годограф замкнутой линейной части при  $r = 20$  задается выражением:

$$W(j\omega) = \frac{(10 - 6\omega^2) + j\omega(\omega^2 - 3)}{\omega^6 + 30\omega^4 - 111\omega^2 + 100}.$$

На рис. 9.4, б представлен годограф  $W(j\omega)$  и круг Попова, по которому определены значения  $-\frac{1}{r} = -0,097$  и  $-\frac{1}{k} = -0,051$ . Величина сектора Попова для этой системы оказывается равной  $[10, 3; 19, 6]$ .

### 9.4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрим нелинейную систему управления канонической структуры и процессы в ней. Составим уравнение процессов, происходящих в этой системе. Пусть  $z(t)$  — выходной сигнал нелинейного элемента, его преобразование по Лапласу  $Z(s) = \mathcal{L}[\Phi(\varepsilon(t))]$ , тогда искомые уравнения систем в преобразованном виде примут вид:

$$Y(s) = W(s)Z(s), \quad E(s) = U(s) - Y(s).$$

Запишем эти уравнения во временной области

$$y(t) = \int_0^t k(\tau)\Phi(\varepsilon(t-\tau))d\tau; \quad \varepsilon(t) = u(t) - \int_0^t k(\tau)\Phi(\varepsilon(t-\tau))d\tau, \quad (9.4)$$

где  $k(t)$  — импульсная характеристика линейной части системы.

Полученные уравнения, позволяют описать динамику вынужденных и свободных процессов, возмущенного и невозмущенного движения нелинейной системы.

Так, например, для описания вынужденного процесса предполагаем, что на систему достаточно давно воздействует входной возмущающий сигнал  $u^*(t)$ , поэтому в настоящий момент времени  $t$  все переходные процессы закончились. В этом случае уравнение вынужденного процесса принимает вид

$$\varepsilon^\circ(t) = u^*(t) - \int_0^\infty k(\tau)\Phi(\varepsilon^\circ(t-\tau))d\tau. \quad (9.5)$$

#### Автоколебания в нелинейных системах

В нелинейных системах возможны автономные периодические движения, которые устанавливаются и поддерживаются в системе за счет сил, зависящих от состояния системы, причем амплитуда этих колебаний определяется не только начальными условиями, но и свойствами самой системы. Такие периодические движения называют **автоколебаниями**.

Автоколебания возникают в системах, которые не являются абсолютно устойчивыми.

Для описания автономных движений нелинейной системы исключим из уравнения вынужденных процессов внешнее возмущение:

$$\varepsilon^a(t) = - \int_0^\infty k(\tau)\Phi(\varepsilon^a(t-\tau))d\tau. \quad (9.6)$$

Полученное уравнение определяет не только автономные движения но и стационарные состояния системы. Действительно, если положить  $\varepsilon^a(t) = \varepsilon^*$ , то

$$\varepsilon^* = -\Phi(\varepsilon^*) \int_0^\infty k(\tau)d\tau = -\Phi(\varepsilon^*)W(0). \quad (9.7)$$

Откуда соотношение для определения точек покоя нелинейной системы можно представить в виде  $\Phi(\varepsilon^*) = -\frac{\varepsilon^*}{W(0)}$ .

На рис. 9.5 приведено графическое представление этого соотношения, для случая однозначной нелинейности и отрицательной обратной связи  $W(0) > 0$  нелинейная система имеет одну точку покоя. Если обратная связь положительная  $W(0) < 0$ , то и при однозначной нелинейности в системе имеется несколько точек покоя.

Уравнение автономных движений описывает и автоколебания в системе, но чтобы найти эти специфические движения нелинейной системы необходимо решить нелинейное интегральное уравнение

$$\varepsilon^a(t) = - \int_0^{\infty} k(\tau) \Phi(\varepsilon^a(t - \tau)) d\tau, \quad (9.8)$$

однако решить его можно лишь приближенными вычислительными методами. Например, с использованием метода гармонической линеаризации нелинейности.

Будем искать приближенное решение этого уравнения в гармонической форме  $\varepsilon^a(t) = A \sin \omega t$ .

Пусть нелинейный элемент системы гармонически линеаризован и  $N(A)$  его описывающая функция:  $z(t) = N(A)\varepsilon^a(t)$ .

Воспользуемся комплексной формой записи гармонических сигналов, подставим их в интегральное уравнение автономных движений и получим уравнение автоколебаний

$$Ae^{j\omega t} = -AN(A) \int_0^{\infty} k(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = -AN(A) e^{j\omega t} \int_0^{\infty} k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (9.9)$$

В последнем выражении интеграл — преобразование Лапласа от импульсной характеристики линейной части, иначе говоря, является частотной характеристикой линейной части  $W(j\omega)$ , поэтому после надлежащих преобразований, получаем соотношение:

$$N(A)W(j\omega) = -1, \quad (9.10)$$

которое определяет **условие возникновения автоколебаний**.

Это соотношение, выведенное Л. С. Гольдфарбом, отражает условия *гармонического баланса* — баланса амплитуд и баланса фаз для поддержания периодического процесса в системе.

Соотношение Гольдфарба может быть получено иначе с использованием линейной теории.

Действительно, гармонические колебания в линейной системе при отсутствии внешнего воздействия возможны только на границе устойчивости системы. Воспользуемся частотным критерием Найквиста, чтобы определить условия, при которых почти линейная система, содержащая линеаризованную нелинейность и линейную часть, оказалась на границе устойчивости.

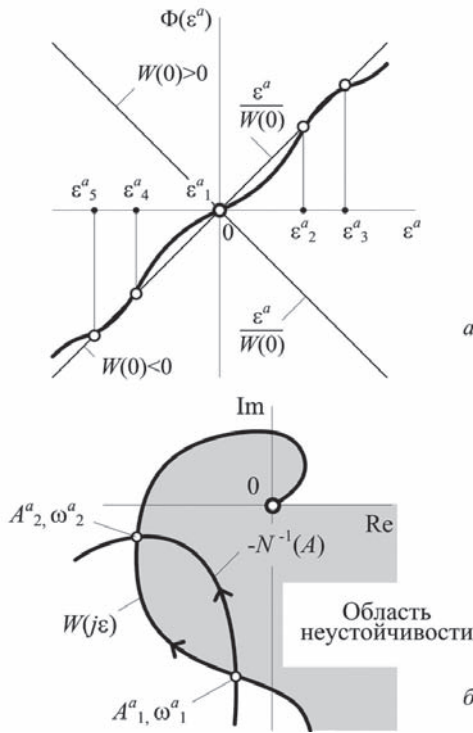


Рис. 9.5

К определению точек покоя нелинейной системы (а). Условие возникновения автоколебаний в нелинейной системе (б)

Разомкнутая часть системы имеет частотную характеристику, равную  $N(A)W(j\omega)$ . Согласно частотному критерию Найквиста, система оказывается на границе устойчивости, если годограф ее разомкнутой части проходит через точку  $-1$  на действительной оси, но это означает, что

$$\exists \omega, A : N(A)W(j\omega) = -1.$$

Что и требовалось показать.

Соотношение Гольдфарба представим в критериальной форме

$$W(j\omega) = -N^{-1}(A), \tag{9.11}$$

удобной для графического способа проверки условий возникновения автоколебаний, и в положительном случае позволяющей определять амплитуду и частоту автоколебаний.

**Критерий** (Л. С. Гольдфарб, 1940). Автоколебания будут иметь место в нелинейной системе, если годограф частотной характеристики  $W(j\omega)$  пересекается с отрицательным инверсным годографом  $-N^{-1}(A)$  гармонически линеаризованного нелинейного элемента.

В каждой точке пересечения (см. рис. 9.5, б) частоту автоколебаний определяют по параметрической оцифровке частотной характеристики  $W(j\omega)$ , а значение амплитуды автоколебаний — по параметрической оцифровке характеристики  $-N^{-1}(A)$ .

Автоколебаниям отвечают изолированные замкнутые траектории — **предельные циклы** в фазовом пространстве состояний системы.

Предельные циклы как движения системы могут быть устойчивыми, неустойчивыми и полуустойчивыми.

В первом случае любые фазовые траектории кольцевой окрестности предельного цикла навиваются на предельный цикл с двух сторон, во втором случае все траектории с двух сторон удаляются от предельного цикла, в третьем случае траектории с одной стороны навиваются, а с другой удаляются от предельного цикла.

Оценить устойчивость автоколебаний можно без построения фазового портрета системы, для этого воспользуемся методом  $D$ -разбиения параметрической области.

Будем рассматривать  $-N(A)^{-1} = \mu$  как параметр, влияние которого на устойчивость почти линейной системы исследуется. Уравнение  $\mu = W(j\omega)$  определяет на комплексной плоскости границу  $D$ -разбиения. Область устойчивости при разбиении комплексной плоскости годографом  $W(j\omega)$  лежит слева при движении по годографу с изменением частоты от нуля до бесконечности.

Теперь сформулируем правило анализа:

- автоколебания будут *устойчивыми*, если при движении в сторону возрастания амплитуды  $A$  годограф  $-N(A)^{-1}$  переходит из области неустойчивости в область устойчивости;

- автоколебания будут *неустойчивыми*, если при движении в сторону возрастания  $A$  годограф  $-N(A)^{-1}$  переходит из области устойчивости в область неустойчивости;

- автоколебания будут *полуустойчивыми*, если годограф  $-N(A)^{-1}$  касается границы  $D$ -разбиения.

Покажем справедливость такого качественного анализа.

*Случай неустойчивых автоколебаний.* Пусть по некоторым причинам амплитуда автоколебаний увеличилась и годограф, пересекая границу  $D$ -разбиения, попадает в область неустойчивости, значит амплитуда еще более увеличится. Автоколебания срываются, поскольку внутренняя фазовая траектория удаляется от предельного цикла.

Пусть теперь амплитуда автоколебаний уменьшилась и годограф, пересекая границу  $D$ -разбиения, попадает из области неустойчивости в область устойчивости, где процессы затухающие, значит амплитуда еще более уменьшится. Автоколебания вновь срываются, поскольку внешняя фазовая траектория удаляется от предельного цикла.

*Случай устойчивых автоколебаний.* Пусть амплитуда автоколебаний увеличилась и годограф, пересекая границу  $D$ -разбиения, попадает в область устойчивости, значит амплитуда в дальнейшем будет уменьшаться, а это значит, что внешняя фазовая траектория приближается к предельному циклу.

При уменьшении амплитуды годограф попадает в область неустойчивости, где происходит дальнейшее возрастание амплитуды, что соответствует приближению внутренней фазовой траектории к предельному циклу. Устанавливаются устойчивые автоколебания.

Аналогично можно пояснить случай полустойчивых автоколебаний.

Используем метод гармонического баланса для определения параметров вынужденного процесса в нелинейной системе, которая испытывает внешнее гармоническое воздействие  $u^*(t) = B \sin(\omega^0 t + \beta)$ .

В абсолютно устойчивой нелинейной системе вынужденный процесс может быть также гармоническим с частотой входа или субгармоническим с частотой в целое число раз меньшей частоты входного сигнала.

Пусть в нелинейной системе имеет место гармонический вынужденный процесс  $\varepsilon^\circ(t) = A \sin(\omega^0 t)$ . Положим, что нелинейный элемент гармонически линеаризован и его описывающая функция  $N(A)$ .

Воспользуемся уравнением вынужденного процесса

$$\varepsilon^\circ(t) = u^*(t) - \int_0^\infty k(\tau) \Phi(\varepsilon^\circ(t - \tau)) d\tau,$$

и подставим туда сигналы  $u^*(t)$ ,  $\varepsilon^\circ(t)$ , записанные в комплексной форме. Получим

$$A e^{j\omega^0 t} = B e^{j(\omega^0 t + \beta)} - \int_0^\infty k(\tau) A e^{j\omega^0(t-\tau)} N(A) d\tau, \quad (9.12)$$

откуда, после преобразования, получим основное соотношение для гармонического вынужденного процесса

$$\frac{B}{A} e^{j\beta} - N(A) W(j\omega^0) = 1. \quad (9.13)$$

Это соотношение позволяет найти амплитуду вынужденных колебаний и сдвиг фаз вынужденных колебаний по отношению к входному гармоническому воздействию. Представим полученное соотношение в форме, удобной для графического представления:

$$W(j\omega^0) = -N^{-1}(A) \left( 1 + \frac{B}{A} e^{j\beta} \right). \quad (9.14)$$

Нанесем на комплексную плоскость частотный годограф  $W(j\omega)$  линейной части и отрицательный инверсный годограф  $-N^{-1}(A)$  гармонически линеаризованного нелинейного звена.

В общем случае эти годографы не пересекаются. Отметим на частотном годографе линейного звена фиксированный геометрический вектор  $OP = W(j\omega^0)$ , на отрицательном инверсном годографе — текущий геометрический вектор  $OQ = -N^{-1}(A)$ , а также вектор их разности

$$PQ = \frac{B}{A} e^{j\beta} N^{-1}(A). \quad (9.15)$$

Точка  $Q$  непрерывно перемещается по кривой  $-N^{-1}(A)$  с непрерывным изменением амплитуды  $A$ . Пусть  $A^*$  — амплитуда, при которой модуль вектора  $PQ$  достигает минимума, тогда

$$|PQ_{min}| = \frac{B^*}{A^*} N^{-1}(A^*). \quad (9.16)$$

Отсюда находим минимальное значение амплитуды входного воздействия, при котором возможны вынужденные колебания на частоте  $\omega^0$  с амплитудой не меньше  $A^*$ .

$$B^* = |PQ_{min}|A^*N(A^*). \quad (9.17)$$

Таким образом, в системе возможны вынужденные колебания с частотой  $\omega^0$  и амплитудой  $A > A^*$ , если  $B \geq B^*$ .

Заметим, что пороговая амплитуда  $B^*$  является функцией частоты внешнего воздействия.

Рассмотрим случай, когда в нелинейной системе возникают автоколебания, тогда кривые  $W(j\omega)$  и  $-N^{-1}(A)$  пересекаются. Если  $\omega^0 = \omega^a$ , то  $|PQ_{min}| = 0$  и значение пороговой амплитуды на частоте автоколебаний равно нулю.

Качественный вид зависимости  $B^* = B^*(\omega^0)$  приведен на рис. 9.6, а там же отмечена область, где возможны вынужденные колебания.

При  $\omega^0$  близких к  $\omega^a$  даже при малых амплитудах внешнего воздействия автоколебания синхронизируются с вынужденной частотой. Это явление называют *режимом захватывания* или *принудительной синхронизацией*.

Вынужденные колебания на частоте  $\omega^0$ , существенно отличной от  $\omega^a$ , приводят к подавлению автоколебаний.

### Примеры:

1. Нелинейный элемент системы имеет характеристику  $\Phi(\varepsilon) = \varepsilon^3$ , линейная часть системы — передаточную функцию  $W(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$ .

Найти комплексный коэффициент гармонической линеаризации характеристики нелинейного элемента

$$\begin{aligned} N(A) &= \frac{2}{A\pi} \int_0^\pi \sin^4 \omega t d\omega t = \\ &= \frac{2}{A\pi} (-\cos \omega t \sin^3 \omega t + 3 \int_0^\pi \sin^2 \omega t \cos^2 \omega t d\omega t) = \\ &= \frac{A}{4\pi} (3\omega t - \sin^3 \omega t \cos \omega t - 3 \sin \omega t \cos \omega t) \Big|_0^\pi = \frac{3}{4} A^2. \end{aligned}$$

Критерий Гольдфарба (9.11) выполняется, очевидно, на действительной оси, поскольку частотный годограф линейной части системы проходит через три квадранта, а отрицательный инверсный годограф  $-N^{-1}(A)$  заполняет всю отрицательную действительную полуось. Годограф линейной части системы пересекает левую полуось на частоте  $1,732 \text{ с}^{-1}$ . При этом действительная часть точки пересечения оказывается равной  $-0,1247$ , что позволяет найти значение амплитуды входного сигнала

$$N^{-1}(A) = \frac{4}{3A^2} = 0,1247.$$

Таким образом, в замкнутой системе будут иметь место автоколебания с частотой  $\omega^a = 1,732 \text{ с}^{-1}$  и амплитудой  $A^a = 3,27$ .



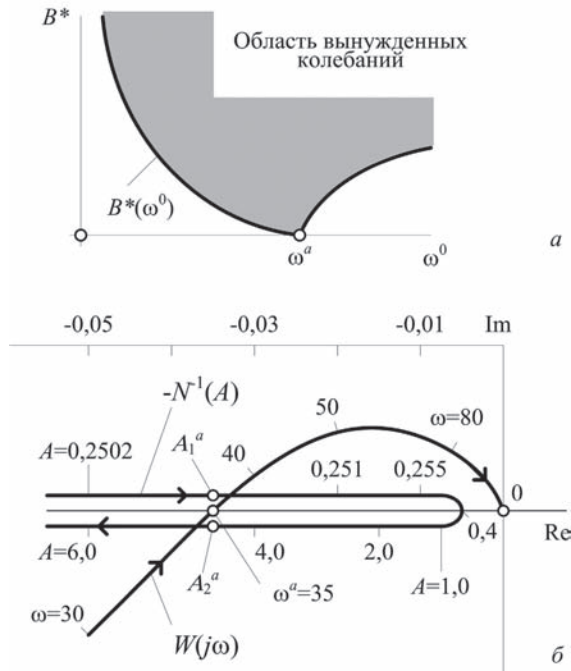


Рис. 9.6

К определению области вынужденных колебаний (а). Проверка условия Гольдфарба — возникновения автоколебаний в нелинейной системе (б)

2. Проверить условия возникновения автоколебаний для системы, в которой линейная часть имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{4}{s(0,08s + 1)(0,01s + 1)},$$

а нелинейный элемент имеет характеристику трехпозиционного идеального реле:  $\Phi(\varepsilon) = 100 \operatorname{sgn}(\operatorname{dez}(4\varepsilon))$ .

Произвольный вектор годографа частотной характеристики линейной части системы имеет модуль

$$A(\omega) = \frac{4}{\sqrt{\omega(1 + 10^{-4}\omega^2)(1 + 64 \cdot 10^{-4}\omega^2)}}$$

и фазу  $\psi(\omega) = -0,5\pi - \operatorname{arctg} 0,01\omega - \operatorname{arctg} 0,08\omega$ .

Комплексный коэффициент гармонической линеаризации для нелинейного элемента вычислим по выражению

$$N(A) = \frac{400}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{0,25}{A}\right)^2}, \quad A > 0,25,$$

поэтому отрицательный инверсный годограф этой характеристики может быть вычислен по выражению

$$-N(A)^{-1} = -\frac{\pi A^2}{\sqrt{400(A^2 - 0,0625)}}.$$

Из графического построения, представленного на рис. 9.6, б следует, что годографы пересекаются в двух точках, значит в системе возможны два автоколебательных процесса с частотой  $\omega^a = 3,5 \text{ с}^{-1}$  и амплитудой  $A_1^a = 0,2503$ , для первого процесса и  $A_2^a = 5,0$  — для второго.

Автоколебания с параметрами  $A_2^a = 0,2503$  и  $\omega^a = 3,5 \text{ с}^{-1}$  оказываются неустойчивыми, в системе может установиться устойчивый периодический процесс близкий к гармоническому  $y(t) = 5 \sin 3,5t$ .

**3.** Проверить условия возникновения автоколебаний для системы, в которой линейная часть имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

а нелинейный элемент — характеристику идеального реле

$$\Phi(\varepsilon) = \Phi_0 \operatorname{sgn} \varepsilon.$$

Комплексный коэффициент гармонической линеаризации нелинейного элемента

$$N(A) = \frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn}(A \sin \omega t) \sin \omega t \, d\omega t, = \frac{4\Phi_0}{\pi A} \int_0^{0,5\pi} \sin \omega t \, d\omega t = \frac{4\Phi_0}{\pi A}.$$

Проверим аналитически выполняется ли условие возникновения автоколебаний:  $1 + N(A)W(j\omega) = 0$ .

В выражении

$$s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + \frac{4k\Phi_0}{\pi A} = 0$$

выполним замену переменных  $s = j\omega$  и приравняем к нулю действительную и мнимую части этого выражения. Получим

$$\begin{aligned} \frac{4k\Phi_0}{\pi A} - (T_1 + T_2)\omega^2 &= 0, \\ -T_1 T_2 \omega^3 + \omega &= 0. \end{aligned}$$

Эта система уравнений имеет единственное решение, следовательно, условия возникновения автоколебаний выполняются. Находим частоту и амплитуду автоколебаний:

$$\omega^a = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}, \quad A^a = \frac{4k\Phi_0 T_1 T_2}{\pi(T_1 + T_2)}.$$

4. Определить параметры автоколебаний в системе с нелинейным регулятором, с характеристикой двухпозиционного реле с прямоугольным гистерезисом, у которой  $\Phi_0 = 5, 0$ ;  $\lambda = 0, 1$  и линейная часть имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{0,36}{(s+1)(2s+1)(3s+1)}.$$

Выражение для описывающей функции нелинейной характеристики двухпозиционного реле с прямоугольным гистерезисом имеет вид<sup>1</sup>.

$$N(A) = \frac{4\Phi_0}{\pi A} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{A}\right)^2} - j\frac{\lambda}{A} \right]^{-1}, \quad A \geq \lambda.$$

Находим отрицательную инверсную описывающую функцию нелинейного звена

$$-N^{-1}(A) = \frac{\pi A}{4\Phi_0} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{A}\right)^2} + j\frac{\lambda}{A} \right], \quad A \geq \lambda.$$

Эта функция комплекснозначная, ее годограф — прямая линия параллельная действительной оси начинается в точке с координатами  $\left(0, -j\frac{\pi\lambda}{4\Phi_0}\right)$  и заканчивается в отрицательной бесконечности.

В системе возникают автоколебания при любой линейной части системы порядка не ниже второго.

В условиях данной задачи годограф  $-N^{-1}(A)$  параллелен действительной оси на расстоянии  $0,005\pi$  и поэтому частоту автоколебаний можно определить из условия

$$\text{Im } W(j\omega^a) = -0,005\pi,$$

затем следует определить  $\text{Re } W(j\omega^a)$  и составить уравнение относительно неизвестной  $A^a$  — амплитуды автоколебаний:

$$\text{Re}(-N^{-1}(A^a)) = \text{Re}W(\omega^a).$$

Выполним этот алгоритм:

$$W(j\omega) = \frac{0,165 - 1,83\omega^2 - j\omega(0,995 - \omega)}{(0,165 - 1,83\omega^2)^2 + \omega^2(0,995 - \omega)^2}.$$

Уравнение для определения частоты автоколебаний имеет допустимое решение  $\omega^a = 0,977 \text{ с}^{-1}$ . На этой частоте  $\text{Re } W(j\omega^a) = -0,632$ .

Уравнение для определения амплитуды автоколебаний имеет решение:  $A^a = 4,02$ . Значит в системе могут возникнуть устойчивые автоколебания, близкие к

$$y(t) = 4,02 \sin 0,977t.$$

<sup>1</sup> Топчиев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования: учеб. пособие для вузов. — М.: Машиностроение, 1989.

5. Определить коэффициент усиления линейной части нелинейной системы для возбуждения автоколебаний с амплитудой не более 2,5 В, если характеристика нелинейного звена  $\Phi(\varepsilon) = \text{sat } \varepsilon$  и передаточная функция линейной части

$$W(s) = \frac{k}{s^2 + 2s^2 + s + 1}.$$

Определяем частотную характеристику линейного звена:

$$W(j\omega) = k \frac{1 - 2\omega^2 - j\omega(1 - \omega^2)}{(1 - 2\omega^2)^2 + j\omega^2(1 - \omega^2)^2}.$$

Отрицательный инверсный комплексный коэффициент гармонической линеаризации характеристики типа ограничение, определяемый выражением

$$-N(A)^{-1} = -\frac{\pi A}{4\Phi_0},$$

является действительной функцией. Его годограф расположен на отрицательной действительной полуоси, начиная с нуля при  $A = 0$  и устремляясь к отрицательной бесконечности при  $A \rightarrow \infty$ .

Автоколебания в системе возникают на частоте  $\omega^a = 1$ , что соответствует точке пересечения действительной оси годографом частотной характеристики линейной части, при этом отсекается отрезок  $-k$ . Автоколебания с амплитудой не более 2,5 В в системе будут тогда, когда  $0 < k < 2,5$ .

## 9.5. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Количественные оценки качества нелинейной системы управления в полной мере могут быть определены по кривым переходного процесса, которые можно построить приближенно или с использованием вычислительных средств, и в отдельных частных случаях найти аналитически.

Методы приближенного построения переходного процесса в нелинейных системах, допускающих гармоническую линеаризацию, аналогичны приближенным частотным методам построения переходного процесса в линейных системах. Отличие состоит в том, что если для линейных систем передаточная функция не зависит от входного сигнала, то в гармонически линеаризованных нелинейных системах имеется не одна передаточная функция, а семейство передаточных функций

$$\{W(j\omega; A) = N(A)W(j\omega)\},$$

в котором параметром оказывается амплитуда входного сигнала. Поэтому фиксируется ограниченный набор значений параметра  $\{A_i\}$  — амплитуд входного сигнала и для каждого значения выполняется процедура линейного построения переходного процесса. По построенным частным кривым переходного процесса строят результирующий переходный процесс по некоторому эвристическому правилу.

Более точным и прогрессивным методом построения переходных процессов и оценки качества нелинейных систем и является метод моделирования вычислительными средствами.

Анализ качества процессов в нелинейной системе, испытывающей случайное воздействие, выполняют по стохастически линеаризованной системе. Вынужденный процесс в системе определяют выражением

$$\varepsilon^\circ(t) = u^*(t) - K_s(\sigma) \int_0^\infty k(\tau) \varepsilon^\circ(t - \tau) d\tau, \quad (9.18)$$

где  $u^*(t)$  — входной случайный процесс;  $K_s(\tau)$  — коэффициент стохастической линеаризации нелинейного элемента.

Передаточная функция по ошибке линеаризованной системы имеет вид:

$$H_\varepsilon(s; \sigma) = \frac{1}{1 + K_s(\sigma)W(s)}, \quad (9.19)$$

поэтому дисперсия ошибки может быть вычислена по выражению

$$D_e(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |H_\varepsilon(j\omega; \sigma)|^2 S_u(\omega) d\omega, \quad (9.20)$$

где  $S_u(\omega)$  — спектральная плотность входного случайного процесса.

### Примеры:

**1.** Построить переходной процесс в нелинейной системе стабилизации числа оборотов дизельного двигателя.

В эту систему, как показано на рис. 9.7, *a*, входят нелинейный регулятор с характеристикой

$$\Phi(\varepsilon) = 0,25 \text{sat}(\text{dez}(0,667\varepsilon)),$$

сервопривод с передаточной функцией интегрирующего звена и местная обратная связь с выхода сервопривода на вход регулятора. Кроме того, на вход регулятора подается сигнал от инерционного измерителя оборотов, передаточная функция которого

$$W_1(s) = \frac{0,25}{0,1s + 1}.$$

Передаточная функция самого дизеля имеет вид  $W_2(s) = \frac{336}{0,83s + 1}$ . Для построения переходного процесса определяем передаточную функцию разомкнутой части гармонически линеаризованной системы

$$W(s) = \frac{84N(A)}{(0,83s + 1)(0,1s + 1)(s + 5N(A))}.$$

здесь описывающую функцию нелинейного элемента вычисляют по выражению:

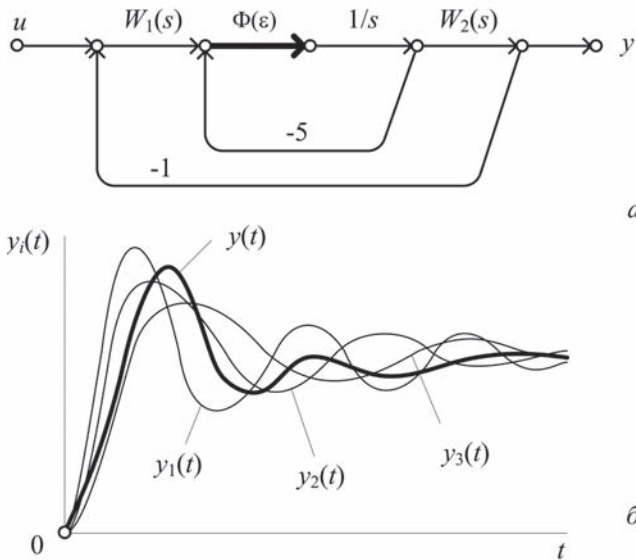


Рис. 9.7

Структура нелинейной системы стабилизации числа оборотов дизельного двигателя (а). Построение по частным составляющим «среднего» переходного процесса (б)

$$N(A) = \begin{cases} 0,53(0,142 - \sin 2\alpha), & 1,5 < |A| \leq 3; \\ 0, & |A| \leq 1,5; \\ 0,53(2\alpha - 2\beta - \sin 2\alpha + \sin 2\beta), & |A| > 3, \end{cases}$$

в котором  $\alpha = \arcsin \frac{1,5}{A}$ ,  $\beta = \arcsin \frac{3}{A}$ .

Определяем передаточную функцию замкнутой линеаризованной системы и ее вещественную часть, по которой известными в линейной теории методами, например, методом трапеций приближенно строим три переходных процесса для трех различных значений входного сигнала, например,  $A_i = 4,5; 6,0; 9,0$  (см. рис. 9.7, б). Затем по этим частным составляющим переходного процесса строим искомый  $y(t)$  «средний» переходный процесс.

**2.** На нелинейную систему с релейной характеристикой нелинейного звена  $\Phi(\epsilon) = \Phi_0 \text{sgn } \epsilon$  воздействует стационарный гауссов случайный процесс со спектральной плотностью  $S_u(\omega) = \frac{b_0}{1 + a^2 \omega^2}$ . Линейная часть системы имеет передаточную функцию в виде  $W_1(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)}$ .

Найти дисперсию обработки входного случайного сигнала.

Выполним стохастическую линеаризацию характеристики нелинейного звена системы. Коэффициент стохастической линеаризации идеального реле определяется вы-

ражением

$$K_s(\omega) = \frac{2\Phi_0}{\sqrt{2\pi\sigma}}.$$

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке имеет вид

$$H_\varepsilon(s) = \frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + kK_s(\sigma)},$$

поэтому дисперсию ошибки будем вычислять, используя прямой матричный метод (гл. 7.3)

$$D_e = \frac{b_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{T^2(j\omega)^4 + (j\omega)^2}{|aT(j\omega)^3 + (T + a)(j\omega)^2 + (1 + akK_s(\sigma))(j\omega) + kK_s(\sigma)|^2} d\omega.$$

Для вычисления этого интеграла составим матрицу Гурвица по коэффициентам знаменателя подынтегральной функции

$$\begin{pmatrix} T + a & kK_s(\sigma) & 0 \\ aT & 1 + akK_s(\sigma) & 0 \\ 0 & T + a & kK_s(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы  $G = kK_s(\sigma)(T + a(1 + akK_s(\sigma)))$ .

Значение

$$N = \det \begin{pmatrix} b_0T^2 & b_0 & 0 \\ aT & 1 + akK_s(\sigma) & 0 \\ 0 & T + a & kK_s(\sigma) \end{pmatrix} = b_0kK_s(\sigma)T(T(1 + kK_s(\sigma)) - a).$$

Окончательное выражение для дисперсии ошибки принимает вид

$$D_e(\sigma) = \frac{b_0T}{2a} \frac{1 + akK_s(\sigma) - a}{T + a^2kK_s(\sigma) + a},$$

из которого видно как изменится дисперсия входного процесса  $D_u = \frac{b_0}{2a}$ .

Заметим, что при достаточно большом значении коэффициента передачи линейной части, дисперсия ошибки отличается от дисперсии входного сигнала в  $\frac{T}{2a}$  раз.

## 9.6. УПРАЖНЕНИЯ

1. На рис. 9.8 приведен фазовый портрет нелинейной системы.

Провести качественный анализ устойчивости точек покоя и различных траекторий.

2. Исследовать устойчивость в малом положения равновесия нелинейной системы:

- $\dot{x}_1 = x_1 - x_2 + x_1x_2,$

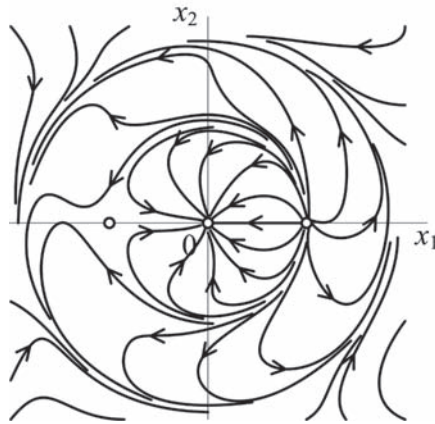


Рис. 9.8

К качественному анализу устойчивости точек покоя  
нелинейной системы

- $\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^2;$
- $\dot{x}_1 = x_1,$
- $\dot{x}_2 = \sin(x_1 + x_2);$
- $\dot{x}_1 = x_1(4 - 2,5x_2),$
- $\dot{x}_2 = (x_1 - 2)x_2.$

**3.** Исследовать устойчивость в малом положения равновесия нелинейной системы канонической структуры, для которой:

- $\Phi(\varepsilon) = \cos \varepsilon,$   
 $W(s) = \frac{6}{s(s+3)};$
- $\Phi(\varepsilon) = 4\varepsilon^3 - \varepsilon,$   
 $W(s) = \frac{3}{(s+1)(s+4)};$
- $\Phi(\varepsilon) = 18\text{sat}(\text{dez}(0,667\varepsilon)),$   
 $W(s) = \frac{6}{(s-2)(s+3)}.$

**4.** Используя функцию  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  в качестве функции Ляпунова, исследовать устойчивость движения нелинейной системы:

- $\dot{x}_1 = x_1 \sin x_1,$   
 $\dot{x}_2 = x_2(1 + x_2^3);$
- $\dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2,$



$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^3; \\ \bullet \quad \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \sin x_2^2. \end{aligned}$$

5. Показать, используя функцию  $V(x_1, x_2) = 3x_1x_2^2 - x_1^3$ , как функцию Ляпунова, что для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^2 - x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2. \end{aligned}$$

положение равновесия неустойчиво.

6. Известен практический прием определения условий для абсолютной асимптотической устойчивости нелинейной системы с заданной нелинейностью  $\Phi(\varepsilon)$ . Согласно этому приему следует:

- аппроксимировать нелинейность  $\Phi(\varepsilon)$  прямой  $k\varepsilon$ ;
- подобрать коэффициенты квадратичной формы так, чтобы она оказалась функцией Ляпунова для линеаризованной системы;
- применить найденную функцию Ляпунова  $V(x)$  к исходной нелинейной системе и использовать требования отрицательной определенности полной производной по времени  $\dot{V}(x)$  в силу нелинейной системы для определения допустимых границ линейной аппроксимации нелинейности  $\Phi(\varepsilon)$ , определяя тем самым сектор абсолютной устойчивости.

Используя данный прием, найти сектор абсолютной устойчивости нелинейной системы управления канонической структуры, у которой

$$\Phi(\varepsilon) \cong 2\varepsilon; \quad W(\varepsilon) = \frac{1}{s(s+2)}$$

функция Ляпунова имеет вид квадратичной формы двух переменных.

7. Исследовать абсолютную устойчивость системы, состоящей из нелинейного регулятора и линейной части с передаточной функцией:

$$\begin{aligned} \bullet \quad W(s) &= \frac{s+4}{(s+2)(s+3)(s+5)}; \\ \bullet \quad W(s) &= \frac{10}{(s+2)(s^2+4)}; \\ \bullet \quad W(s) &= \frac{s+1}{(s+3)(s^2-4)}. \end{aligned}$$

8. Определить сектор Попова и условия абсолютной асимптотической устойчивости нелинейной системы с линейной частью, содержащей звено запаздывания:

$$W(s) = \frac{s+3}{(s+1,5)(s+2)} e^{-s}.$$

9. Определить параметры автоколебаний в системе с нелинейным регулятором и характеристикой двухпозиционного реле с прямоугольным гистерезисом, у которой  $\Phi_0 = 5$ ,  $\lambda = 0,1$  и линейная часть имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{0,06}{(s + 0,5)(s + 0,33)(s + 1)}.$$

10. Определить значение коэффициента усиления линейной части нелинейной системы для возбуждения автоколебаний с амплитудой не более  $2,5$  В, если  $\Phi(\varepsilon) = \text{sat } \varepsilon$ ;  $W(s) = \frac{k}{s^3 + 2s^2 + s + 1}$ .

**Часть III**

**СИНТЕЗ СИСТЕМ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ**



## СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

- Методы последовательной и параллельной коррекции
- Типовые регуляторы и методы их расчета
- Синтез последовательно-подчиненных регуляторов
- Упражнения

### 10.1. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ

Задача синтеза систем управления состоит в выборе принципов управления, подборе структуры и определении параметров управляющего устройства, которые обеспечивают требуемые показатели качества управления.

Современные методы решения задачи синтеза представлены двумя группами: в первую входят методы, использующие внешние модели системы и ее частотные характеристики; вторую группу представляют методы, использующие внутренние модели системы.

Первую группу составляют приближенные методы, вторую — аналитические методы синтеза. Все методы располагают интерактивными машинными средствами поддержки.

Частотные характеристики системы дают достаточные сведения о качестве переходных процессов управления. Так, например, по логарифмической амплитудной частотной характеристике разомкнутого контура системы можно определять статическую и динамическую точность, колебательность, быстродействие и перерегулирование переходного процесса в замкнутой системе. Таким образом, показатели качества синтезируемой системы определяют требования на необходимую форму и параметры частотных характеристик.

Формирование необходимых частотных характеристик замкнутой системы, а значит и решение задачи синтеза может быть достигнуто путем введения в систему корректирующих устройств, видоизменяющих динамические свойства системы. Корректирующие устройства могут быть введены последовательно в цепь сигнала ошибки или параллельно в цепь местной обратной связи. Оба способа имеют свои особенности и незначительные преимущества, поэтому выбор соединения является вопросом скорее техническим, чем теоретическим. Возможны комбинированные способы соединения.

Последовательная коррекция осуществляет преобразование сигнала ошибки, формируя закон управления, например, *пропорциональный, интегральный,*

дифференциальный (П, И, Д) или более сложные смешанные законы: пропорционально-интегральный, пропорционально-дифференциальный, пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИ, ПД, ПИД) — законы регулирования.

Идея метода последовательной коррекции, предложенного В. В. Солодовниковым, основана на связи вещественной частотной характеристики замкнутой системы с параметрами переходного процесса, с одной стороны, и логарифмическими частотными характеристиками разомкнутой системы, с другой.

При известных логарифмических частотных характеристиках объекта регулирования  $L_0(\omega)$ ,  $\varphi_0(\omega)$  и сформированных на основе исходных требований качества желаемых логарифмических частотных характеристиках разомкнутого контура системы  $L^*(\omega)$ ,  $\varphi^*(\omega)$  искомые логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики регулятора  $L_p(\omega)$ ,  $\varphi_p(\omega)$  определяют выражения:

$$\begin{aligned} L_p(\omega) &= L^*(\omega) - L_0(\omega); \\ \varphi_p(\omega) &= \varphi^*(\omega) - \varphi_0(\omega). \end{aligned} \quad (10.1)$$

Синтез контура регулирования, таким образом, сводится к подбору динамического звена с частотными характеристиками  $L_p(\omega)$ ,  $\varphi_p(\omega)$  и к расчету соответствующих параметров этого звена.

Построение желаемых амплитудной и фазовой частотных характеристик производят по исходным требованиям качества  $\sigma$ ,  $t_p$ ,  $c_0, c_1, \dots$ , согласно алгоритму, по которому:

- частоту среза желаемой характеристики  $L^*(\omega)$  выбирают из условия  $\omega_c \geq \omega_c^*$ , где  $\omega_c$  находят по заданному значению перерегулирования  $\sigma$  из номограммы В. В. Солодовникова или по ее табличному эквиваленту:

$$\omega_c^* = \frac{\alpha\pi}{t_p}, \quad (10.2)$$

$\sigma, \%$	10	20	30	40
$\alpha(\sigma)$	0,914	2,625	3,875	5,066

- среднечастотную часть желаемой характеристики  $L^*(\omega)$  проводят через  $\omega_c$  с наклоном  $-20$  дБ/дек. в интервале частот  $(\omega_2, \omega_3)$ . При этом

$$\omega_3 = (2 \div 4)\omega_c, \quad \omega_2 = \frac{\omega_c^2}{\omega_3}; \quad (10.3)$$

избыток фазы  $(\pi - \varphi^*(\omega_2))$  на левом конце и избыток фазы  $(\varphi^*(\omega_3) - \pi)$  на правом конце интервала должен быть не менее  $40$  град;

- низкочастотную часть желаемой характеристики  $L^*(\omega)$  считают совпадающей с низкочастотной частью характеристики  $L_0(\omega)$ , которая принимает на частоте  $\omega = 1$  значение  $20 \lg k$ ,  $k \geq \frac{1}{c_1}$  и имеет асимптотический наклон  $-20\nu$  дБ/дек., при этом  $\nu$  — порядок астатизма объекта и  $c_1$  — коэффициент ошибки;

- сопряжение среднечастотной части характеристики  $L^*(\omega)$  с ее низкочастотной частью выполняют в интервале частот  $(\omega_2, \omega_1)$  прямыми с наклоном  $-40$  дБ/дек.

или  $-60$  дБ/дек. Сопряжение среднечастотной части характеристики  $L^*(\omega)$  с ее высокочастотной частью выполняется в интервале частот  $(\omega_3, \omega_4)$ ,  $\omega_4 = (6 \div 8)\omega_c$  прямыми с наклоном  $-40$  дБ/дек.

При сопряжении среднечастотной части характеристики следует контролировать, чтобы избыток фазы на концах интервала не был меньше  $40$  град;

- искомую передаточную функцию корректирующего звена — пассивного или активного *четырёхполюсника* находят по виду найденных частотных характеристик  $L_p(\omega)$ ,  $\varphi_p(\omega)$  с использованием специальных таблиц<sup>1</sup>.

Завершает процедуру синтеза проверочный расчет или моделирование переходных процессов в скорректированной системе.

**Пример.** Выполнить, используя последовательную коррекцию, синтез замкнутой системы, у которой прямой тракт имеет передаточную функцию

$$W_0(s) = \frac{200}{s(0,1s + 1)(0,02s + 1)(0,005s + 1)},$$

так, чтобы переходный процесс отработки входного ступенчатого сигнала имел переуправление не более  $30\%$  и время регулирования не более  $0,8$  с.

На рис. 10.1, а представлены логарифмические частотные характеристики  $L_0(\omega)$ ,  $\varphi_0(\omega)$  прямого тракта системы.

Для построения желаемой логарифмической амплитудной частотной характеристики определим частоту среза

$$\omega_c \geq \frac{3,875\pi}{0,8} = 15,2 \text{ с}^{-1}.$$

Среднечастотная часть желаемой характеристики занимает интервал

$$(\omega_2, \omega_3), \quad \omega_3 = 30 \div 60 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_2 = 3,8 \div 7,7 \text{ с}^{-1}.$$

Избыток фазы, определяемый по рис. 10.1, а на левом конце интервала  $(\pi - \varphi^*(\omega_2))$  колеблется от  $80$  до  $63$  град, а на правом — от  $30$  до  $58$  град, поэтому правая граница интервала должна быть изменена  $\omega_3 = 45 \div 60, \text{ с}^{-1}$ .

Выполняем сопряжения низкочастотной и высокочастотной частей характеристики так, что  $\omega_1 = 0,4 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_4 = 115 \text{ с}^{-1}$ .

Определяем амплитудную частотную характеристику корректирующего звена, вид которой (см. рис. 10.1, б) позволяет найти передаточную функцию и электрическую схему этого звена (см. рис. 10.1, в),

$$W_p(s) = \frac{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{(T_3s + 1)(T_4s + 1)},$$

где  $T_1 = R_1C_1$ ;  $T_2 = R_2C_2$ ;  $T_3 + T_4 = T_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + T_2$  составляют три соотношения для определения четырех параметров звена.

<sup>1</sup> Топчеев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. — М.: Машиностроение, 1989.

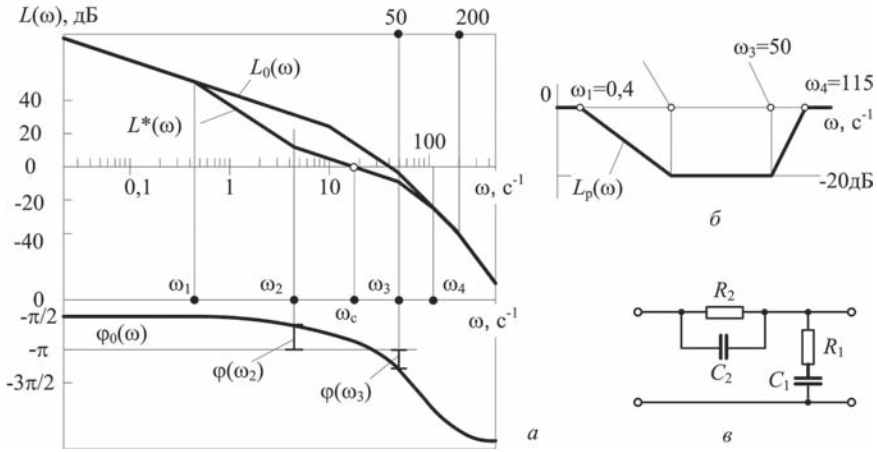


Рис. 10.1

Элементы процедуры синтеза корректирующего звена: а — логарифмические частотные характеристики; б — логарифмическая амплитудно-частотная характеристика корректирующего звена; в — четырехполюсник — корректирующее звено.

Положим  $C_1 = 0,5 \text{ мкФ}$ , тогда остальные три параметра определяются однозначно:

$$T_1 = \frac{1}{4,6} \text{ с}, \quad T_2 = \frac{1}{50} \text{ с}, \quad T_3 = \frac{1}{0,4} \text{ с}, \quad T_4 = \frac{1}{115} \text{ с},$$

поэтому  $R_1 = 435 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 2,0 \text{ МОм}$ ,  $C_2 = 0,05 \text{ мкФ}$ .

Выбор типа соединения корректирующего звена является в основном вопросом техническим, поскольку для каждого корректирующего звена одного типа соединения существует звено другого типа соединения с теми же динамическими свойствами:

$$W_{P1} W_0 = W_{P2} + W_0 = \frac{W_0}{1 + W_{P3} W_0}.$$

В некоторых случаях параллельное соединение корректирующего звена приводит к более простой технической реализации.

На рис. 10.2, а приведена структура системы, в которой коррекцию предполагается выполнить встречно-параллельным соединением, охватив обратной связью регулятор. Синтезируемая система должна быть статической, ее коэффициент передачи не менее 250, переходный процесс не должен иметь перерегулирование более 18%, время регулирования не должно превышать 0,9 с.

Передаточные функции элементов неизменяемой части системы имеют вид:

$$W_0 = \frac{25}{0,4s + 1};$$

$$W_1 = \frac{k}{0,0625s^2 + 0,35s + 1};$$



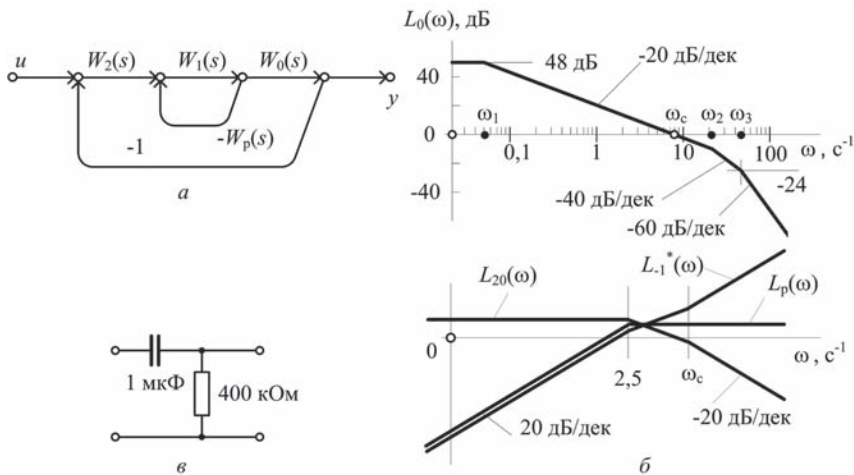


Рис. 10.2

Элементы процедуры синтеза параллельного корректирующего звена: а — структура системы; б — логарифмические амплитудно-частотные характеристики; в — четырехполюсник — корректирующее звено.

$$W_2 = \frac{5}{0,07s + 1},$$

поэтому передаточная функция разомкнутой части системы с регулятором в местной обратной связи принимает вид

$$W = \frac{W_0 W_1 W_2}{1 + W_p W_1}.$$

В среднечастотном интервале логарифмической амплитудной характеристики разомкнутой части системы, который в основном определяет качество замкнутой системы, модуль передаточной функции может быть представлен приближенным выражением  $|W| \simeq \left| \frac{W_0 W_2}{W_p} \right|$ , поскольку в этом интервале  $|W_p W_1| \gg 1$ .

Если теперь этому выражению амплитудной частотной характеристики придать желаемый вид  $|W^*| = \left| \frac{W_0 W_2}{W_p} \right|$ , то оно позволит определить передаточную функцию корректирующего звена  $|W_p| = \left| \frac{W_0 W_2}{W^*} \right|$  по правилу  $L_p(\omega) = L_{20}(\omega) + L_{-1}^*(\omega)$ , где

$$\begin{aligned} L_p(\omega) &= 20 \lg |W_p(j\omega)|; \\ L_{20}(\omega) &= 20 \lg |W_0(j\omega)W_2(j\omega)|; \\ L_{-1}^*(\omega) &= 20 \lg \left| \frac{1}{W^*(j\omega)} \right|. \end{aligned}$$

На рис. 10.2, б приведены кривые  $L_p(\omega)$ ,  $L_{20}(\omega)$ ,  $L_{-1}^*(\omega)$ ,  $L^*(\omega)$ , причем последняя кривая — желаемая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика разомкнутой части системы построена по требуемым параметрам. Частота среза

$$\omega_c > \frac{2,283\pi}{0,9} = 8 \text{ с}^{-1},$$

низкочастотная часть характеристики параллельна оси абсцисс на уровне  $20 \lg 250 = 48$  дБ сопряжение низкочастотной и среднечастотных частей имеет место на частоте  $\omega_1 = 0,06 \text{ с}^{-1}$ . Частота  $\omega_2$  принята равной  $10,6 \text{ с}^{-1}$ , чтобы обеспечить запас устойчивости по амплитуде  $-10$  дБ,  $\varphi(\omega_2) = -180$  град.

Высокочастотная часть желаемой характеристики формируется так, чтобы параллельное корректирующее устройство имело простую реализацию, для чего наклоны и частоты сопряжения желаемой характеристики на высоких частотах принимают совпадающими с наклонами и частотами характеристики неизменяемой части. В нашем случае высокочастотная часть желаемой характеристики принята в виде двух прямых с наклонами  $-40$  дБ/дек. и  $-80$  дБ/дек. соответственно.

Построенная кривая  $L_p(\omega)$  имеет вид, по которому можно выбрать структуру, а затем и передаточную функцию корректирующего звена  $W_p(s) = \frac{s}{0,4s + 1}$ , которое реализуется  $RC$ -схемой четырехполюсника. На рис 10.2, в приведена схема корректирующего звена.

## 10.2. ТИПОВЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ И МЕТОДЫ ИХ РАСЧЕТА

Регулятор или управляющее устройство является необходимым элементом системы автоматического управления. Регулятор измеряет отклонение регулируемой величины от ее заданного значения и на этом основании вырабатывает сигнал воздействия на исполнительный орган объекта управления. В общем случае регулятор системы может выполнять функции чувствительного элемента, задающего устройства, усилительного, управляющего и исполнительного устройств, однако основными функциями типового регулятора все же являются усиление сигнала рассогласования и формирование корректирующих сигналов от ошибки, ее производной и интеграла ошибки.

Различают несколько разновидностей регуляторов в зависимости от алгоритма формирования корректирующего сигнала: пропорциональный *П-регулятор*, интегральный *И-регулятор*, пропорционально-интегральный *ПИ-регулятор*, пропорционально-дифференциальный *ПД-регулятор*, пропорционально-интегрально-дифференциальный *ПИД-регулятор*.

П-регулятор имеет статическую линейную характеристику, передаточная функция его равна

$$W(s; k_p) = k_p. \quad (10.4)$$

П-регулятор безынерционно реагирует на ступенчатое воздействие.

И-регулятор имеет передаточную функцию вида

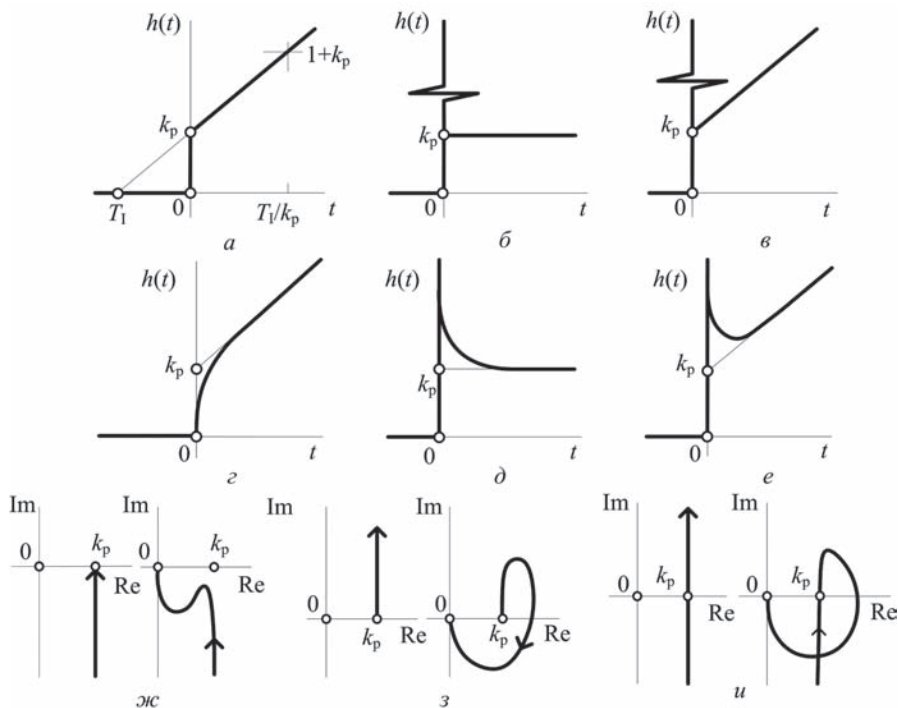


Рис. 10.3

Идеальная и реальная реакции звена на входной единичный ступенчатый сигнал для И-регулятора (а, г); ПИ-регулятора (б, д); ПИД-регулятора (в, е). Идеальные и реальные частотные годографы Найквиста: реальных И-регулятора (ж), ПИ-регулятора (з) и ПИД-регулятора (и)

$$W(s; T_I) = \frac{1}{T_I s}, \tag{10.5}$$

где  $T_I$  — параметр, называемый *временем интегрирования*.

На входной единичный ступенчатый сигнал И-регулятор реагирует линейным сигналом, как показано на рис. 10.3, а, причем за время  $T_I$  выходной сигнал достигнет единицы.

ПИ-регулятор имеет двухпараметрическую передаточную функцию вида

$$W(s; k_p, T_I) = \frac{k_p(1 + T_I s)}{T_I s}, \tag{10.6}$$

где  $k_p$  — коэффициент передачи;  $T_I$  — постоянная времени или время изодрома.

Эти два параметра настраиваемые. ПИ-регулятор является астатическим регулятором, он совмещает в себе свойства П- и И-регуляторов, его реакция на единичное воздействие представляется мгновенным скачком величины  $k_p$  и последующим линейно растущим сигналом с наклоном  $\frac{T_I}{k_p}$ .

Структурная модель регулятора может быть представлена двояко: как параллельно соединенные пропорциональное и интегрирующее звенья или как последовательно соединенные форсирующее и интегрирующее звенья. Значит ПИ-регулятор обладает свойством упреждения: выходной сигнал сдвинут так, как будто интегрирование началось раньше входного сигнала на время изодрома.

ПД-регулятор имеет передаточную функцию вида

$$W(s; k_p, T_D) = k_p(1 + T_D s), \quad (10.7)$$

где  $T_D$  — параметр, называемый *временем дифференцирования* или *временем упреждения*;  $k_p$  — коэффициент передачи.

ПД-регулятор объединяет свойства пропорционального и дифференцирующего звена, поэтому в стационарном режиме, когда входной сигнал не изменяется, регулятор ведет себя как пропорциональное звено, но при изменении входного сигнала вырабатывается дополнительная составляющая, соответствующая производной от входного сигнала. Переходная функция ПД-регулятора показана на рис. 10.3, б.

ПИД-регулятор имеет трехпараметрическую передаточную функцию вида

$$W(s; k_p, T_I, T_D) = k_p \left( 1 + \frac{1 + T_I s}{T_D s} \right), \quad (10.8)$$

где  $T_I$ ,  $T_D$  — время изодрома и время упреждения соответственно;  $k_p$  — коэффициент передачи.

Структурная модель ПИД-регулятора может быть представлена в мультипликативной и аддитивной формах:

$$\begin{aligned} W(s; k_{p1}, T_{I1}, T_{D1}) &= \frac{k_{p1}(1 + T_{I1}s)(1 + T_{D1}s)}{T_{I1}s}; \\ W(s; k_{p2}, T_{I2}, T_{D2}) &= k_{p2} + \frac{1}{T_{I2}s} + T_{D2}s. \end{aligned} \quad (10.9)$$

На рис. 10.3, в приведена переходная характеристика ПИД-регулятора. Логарифмическая амплитудная частотная характеристика ПИД-регулятора имеет симметричный вид относительно своей среднечастотной части, наклон в низкочастотной части составляет  $-20$ дБ/дек. и  $20$ дБ/дек. в высокочастотной части характеристики. Средние частоты подавляются ПИД-регулятором.

Соединения регуляторов между собой позволяют менять структуру и параметры регуляторов. Так последовательное соединение П- и И-регуляторов составляет структуру И-регулятора, но изменяет время интегрирования в  $k_p$  раз, параллельное соединение этих же регуляторов порождает структуру ПИ-регулятора. Последовательное соединение ПД- и И-регуляторов порождает ПИ-регулятор, параллельное соединение этих же регуляторов порождает ПИД-регулятор. Последовательное и параллельное соединение ПИ- и ПД-регуляторов порождает структуру ПИД-регулятора, но, естественно, с разными параметрами.

Часто при использовании типовых регуляторов возникает необходимость в сглаживании входного сигнала регулятора без изменения коэффициента передачи. Для этой цели используют фильтры на основе инерционных звеньев.

Типовые регуляторы являются по существу идеальными динамическими звеньями. Динамические характеристики реальных регуляторов электрических, пневматических, гидравлических и комбинированных могут значительно отличаться от идеальных (см. рис. 10.3, *г, д, е* и 10.3, *ж, з, и*).

Модель реального регулятора можно представить в виде последовательного соединения идеального регулятора и так называемого балластного звена. Часто балластным звеном оказывается инерционное звено. Допустимые отклонения частотных характеристик регуляторов регламентированы стандартом на промышленные регуляторы.

Особенностью реального управления многими инерционными технологическими процессами, такими как процесс регулирования давления, расхода, уровня, температуры, является аperiodичность переходных характеристик.

Общий вид экспериментальных переходных кривых таких процессов характеризуется тремя основными параметрами:  $T$ ,  $r$ ,  $K$  — постоянной времени, временем отставания и скоростью нарастания соответственно, а простейшей обобщенной моделью является

$$W(s) = \frac{K}{s + \frac{1}{T}} e^{-sr}. \quad (10.10)$$

Для управления такими процессами обычно используется ПИД-регулятор, особенно тогда, когда  $T > (5 \div 10)r$ .

Широкое применение ПИД-регуляторов можно объяснить тем, что эти регуляторы выпускаются в разнообразном аппаратном исполнении (электрическом, пневматическом, электромеханическом, гидравлическом, электрогидравлическом, компьютерном).

Расчет параметров ПИД-регулятора достаточно прост и практически табулирован, практика настройки системы с ПИД-регулятором доведена до простейших приемов, используя **метод Циглера–Никольса**.

В этом методе используются только два параметра  $r$ ,  $K$ . Метод тем более точен, чем больше третий параметр  $T$ .

Правила настройки регулятора состоят из двух шагов.

На первом шаге регулятор рассматривают как пропорциональный, увеличивают коэффициент передачи прямого тракта до предельного значения  $k^*$ , когда система выходит на границу устойчивости и совершает незатухающие колебания с периодом  $T^* = \frac{2\pi}{\omega^*}$ .

На втором шаге определяют параметры для:

- П-регулятора  $k_p = 0,5k^*$ ;
- ПИ-регулятора  $k_p = 0,45k^*$ ,  $T_I = 0,83T^*$ ;
- ПИД-регулятора  $k_p = 0,6k^*$ ,  $T_I = 0,5T^*$ ,  $T_D = 0,125T^*$ .

Показатели  $k^*$ ,  $T^*$ , по которым определяют параметры настройки регуляторов, находят расчетным путем с использованием  $W(j\omega)$  — частотного годографа Найквиста. В самом деле, предельный коэффициент усиления  $k^*$  и период  $T^* = \frac{2\pi}{\omega^*}$  однозначно определяют из условия  $W(j\omega^*) = -1$ , когда частотная характеристика разомкнутой

части системы проходит через точку  $-1$  на действительной оси. Параметры регулятора могут быть определены и по экспериментально снятой кривой переходного процесса для:

- П-регулятора  $k_p = \frac{1}{rK}$ ;
- ПИ-регулятора  $k_p = \frac{0,9}{rK}$ ,  $T_I = 3, 3r$ ;
- ПИД-регулятора  $k_p = \frac{1,2}{rK}$ ,  $T_I = 2r$ ,  $T_D = 0, 5r$ .

### Примеры:

1. Сформировать структуру ПИ- и ПИД-регулятора на основе схемы усилителя  $W_A$ , охваченного отрицательной обратной связью с  $W_R$ .

Передаточная функция такого регулятора

$$W_p(s) = \frac{W_A(s)}{1 + W_A(s)W_R(s)}.$$

Если при этом коэффициент передачи усилителя существенно велик, так что  $W_A(s)W_R(s) \gg 1$  и поэтому  $W_p(s) \cong \frac{1}{W_R(s)}$ .

Передаточная функция регулятора практически определяется только передаточной функцией обратной связи.

Так по схеме усилителя с *бесконечно большим* коэффициентом усиления и отрицательной обратной связью в виде  $W_R(s) = \frac{1}{k_D s + k}$  формируется ПД-регулятор, с

$W_R(s) = \frac{s}{ks + k_I}$  формируется ПИ-регулятор и ПИД-регулятор формируется с

$$W_R(s) = \frac{s}{k_D s^2 + ks + k_I}.$$

2. Какими характеристиками обладает последовательное и параллельное соединение ПИ- и ПД-регуляторов?

Последовательное соединение ПИ-регулятора с параметрами  $k_{p1}, T_I$  и ПД-регулятора с параметрами  $k_{p2}, T_D$  приводит к структуре ПИД-регулятора с параметрами:  $k_p = k_{p1} k_{p2}$ ,  $T_I, T_D$ .

Действительно,

$$W(s) = \frac{k_{p1}(T_I s + 1)}{T_I s} k_{p2}(T_D s + 1) = k_{p1} k_{p2} \left( \left(1 + \frac{T_D}{T_I}\right) + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right).$$

Параллельное соединение тех же регуляторов приводит к структуре ПИД-регулятора, у которого коэффициент передачи  $k_p = k_{p1} + k_{p2}$ , время изодрома равно  $\frac{T_I}{k_{p1}}$ , время упреждения равно  $k_{p2} T_D$ .

$$W(s) = \frac{k_{p1}(1 + T_I s)}{T_I s} + k_{p2}(T_D s + 1) = (k_{p1} + k_{p2}) + \frac{k_{p1}}{T_I s} + k_{p2} T_D s.$$

**3.** Каковы характеристики *реального* Д-регулятора?

Передаточная функция реального Д-регулятора имеет вид

$$W(s) = \frac{k_p s}{1 + T_B s},$$

где  $T_B$  — постоянная времени балластного звена.

Если переходная характеристика идеального регулятора является идеальным  $\delta$ -сигналом, то реакция реального Д-регулятора на ступенчатое воздействие имеет вполне реальный вид

$$h(t) = \frac{k}{T_B} e^{-\frac{t}{T_B}}$$

и чем меньше значение балластной постоянной тем ближе реальный регулятор к идеальному. Частотный годограф реального Д-регулятора представляется полуокружностью с центром в точке  $\frac{k_p}{2T_B}$  на действительной оси, годограф начинается в нуле и заканчивается в точке  $\frac{k_p}{T_B}$ .

Логарифмическая частотная характеристика реального Д-регулятора почти совпадает на низких частотах с идеальной, а на высоких совпадает с характеристикой П-регулятора.

**4.** В системе, предназначенной для воспроизведения линейного сигнала, объект имеет передаточную функцию

$$W_0(s) = \frac{1}{s(s+5)(s+10)}.$$

Для коррекции свойств системы применен П-регулятор с коэффициентом передачи  $k_p$ . Каким должен быть параметр этого регулятора, чтобы установившаяся ошибка отработки сигнала  $u(t) = 0,5t$  была не более 0,1 и запас устойчивости по фазе не менее 48 град?

Передаточная функция замкнутой системы с пропорциональным регулятором имеет вид

$$H(s) = \frac{k_p}{s^3 + 15s^2 + 50s + k_p}.$$

Система является астатической первого порядка, поскольку в прямом тракте содержит интегрирующее звено. Первые два коэффициента ошибки равны:  $c_0 = 0, c_1 = \frac{50}{k_p}$ . Установившаяся ошибка воспроизведения заданного линейного сигнала  $e^* = 0,5 \frac{50}{k_p}$  по условию задачи должна быть не более 0,1, поэтому  $k_p \geq 250$ .

При  $k_p = 250$  характеристические корни замкнутой системы  $-12, 6; -1, 2 \pm j4, 3$ , что позволяют оценить показатели качества переходного процесса:

время регулирования при погрешности  $\Delta = 0,02$  составит

$$t_p = \frac{4}{1,2} \simeq 3,3 \text{ с};$$

перерегулирование  $\sigma \simeq 40\%$ , поскольку

$$\sigma \simeq \exp \frac{\pi \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} 100, \quad \zeta = \frac{1,2}{4,3}.$$

Фазовая частотная характеристика разомкнутой системы

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg 0,1\omega - \arctg 0,2\omega$$

на частоте среза определяет для замкнутой системы запас устойчивости по фазе. Требуемый запас по фазе в 48 град будет на частоте, которая удовлетворяет уравнению

$$180 + \varphi(\omega_c) = 48 \text{ град}$$

или в преобразованном виде  $0,733 = \arctg 0,1\omega_c + \arctg 0,2\omega_c$ . Откуда находим, что  $\omega_c = 2,6 \text{ с}^{-1}$ .

На частоте среза  $|k_p W_0(j\omega_c)| = 1$  модуль частотной характеристики определяет выражение

$$|k_p W_0(j\omega_c)| = \frac{k_p}{\omega \sqrt{(1 + 0,01\omega^2)(1 + 0,04\omega^2)}},$$

поэтому справедливо соотношение

$$\omega_c^2(1 + 0,01\omega_c^2)(1 + 0,04\omega_c^2) = k_p^2.$$

Подставив в это выражение значение частоты среза, определим граничное значение коэффициента усиления П-регулятора, которое оказалось равным  $k_p = 3,02$ . Превышение этого значения приводит к снижению запаса устойчивости по фазе.

Таким образом, коэффициент передачи П-регулятора должен удовлетворять противоречивому условию

$$3,02 \geq k_p \geq 250,0.$$

Следовательно, выполнить требования настройки системы, используя П-регулятор, невозможно!

**5.** В замкнутой системе с объектом второго порядка

$$W_0(s) = \frac{81,5}{s(s + 3,6)}$$

переходный процесс отработки ступенчатого сигнала имеет перерегулирование  $\sigma = 52,2\%$  и время регулирования  $t_p = 1,5 \text{ с}$ . Эти оценки можно улучшить введением в прямой тракт ПД-регулятора. Подобрать параметры регулятора так, чтобы установившаяся ошибка воспроизведения единичного линейного сигнала  $\varepsilon^* = 0,045$ ; перерегулирование  $\sigma = 5\%$  и время регулирования  $t_p = 0,5 \text{ с}$ .

В качестве корректирующего звена используем ПД-регулятор

$$W_p(s) = k_p(1 + T_D s).$$



Передаточная функция замкнутой системы с регулятором принимает вид

$$H_p(s) = \frac{81,5k_p(1 + T_D s)}{s^2 + (3,6 + 81,5k_p T_D)s + 81,5k_p}.$$

Установившаяся ошибка воспроизведения единичного линейного сигнала

$$\epsilon^* = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - H(s)}{s} = \frac{3,6}{81,5k_p} = \frac{0,044}{k_p}.$$

Следовательно, можно положить  $k_p = 1,0$ . После замыкания системы с ПД-регулятором ее характеристический многочлен принимает вид

$$\lambda^2 + (3,6 + 81,5T_D)\lambda + 81,5.$$

Значит  $2\zeta\omega_0 = 3,6 + 81,5T_D$ ,  $\omega_0^2 = 81,5$ . Из этих выражений находим, что коэффициент демпфирования  $\zeta = 0,2 + 4,5T_D$ . Чтобы перерегулирование не превосходило 5%, следует положить  $\zeta \simeq 1,0$ , тогда  $T_D = 0,178$  с.

Найденным значениям параметров ПД-регулятора отвечают следующие оценки качества переходного процесса:  $\sigma = 4,2\%$ ;  $t_p = 0,49$  с.

### 10.3. СИНТЕЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПОДЧИНЕННЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Обобщением метода последовательной коррекции применительно к системам, у которых структурная модель представляется последовательным соединением инерционных и интегрирующих звеньев, является *метод последовательной коррекции с подчиненным регулированием координат*.

Этот метод синтеза, разработанный фирмой *Siemens* в конце пятидесятих годов прошлого столетия, предназначался первоначально в основном для синтеза систем управления автоматизированными электроприводами.

Пусть объект управления имеет передаточную функцию вида:

$$W_o(s) = \prod_{i=1}^m \frac{k_i}{T_i s + 1},$$

где  $k_i$ ,  $T_i$  — параметры  $i$ -го звена структурной модели.

Постоянные времени  $T_i$  объекта управления условно разобьем на две группы — *большие* и *малые*. Звенья структуры, которым отвечают большие постоянные времени, определяют основную динамику переходных процессов в системе, ее быстродействие. Средне- и низкочастотная части логарифмической амплитудной частотной характеристики системы определяют по существу динамические свойствами звеньев с большими постоянными времени. Звенья с малыми постоянными времени формируют высокочастотную часть логарифмической амплитудной характеристики.

Основная идея метода коррекции состоит в последовательном включении регуляторов со структурой инерционных звеньев для *компенсации* постоянных времени

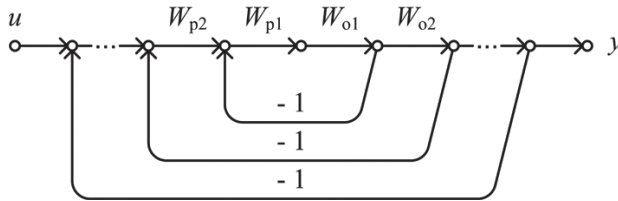


Рис. 10.4

Структура многоконтурного регулирования с вложенными подчиненными контурами.

первой группы, что позволит исключить, из модели объекта, а значит и из разомкнутой части системы, звенья с большими постоянными времени.

Для устранения статической ошибки и придания системе астатических свойств в прямой контур регулирования вводят интегрирующее звено и обеспечивают коэффициент передачи, равный единице. Система приобретает свойство *точного* воспроизведения и достаточно большого быстродействия, в силу малости оставшихся не компенсированных постоянных времени.

Пусть звенья модели объекта перенумерованы так, что первые  $k$  имеют *большие* постоянные времени, тогда, после введения компенсирующих регуляторов, передаточная функция прямого тракта системы примет вид

$$W(s) = W_p(s)W_o(s) = \frac{1}{T_0 s \prod_{i=k+1}^m (T_i s + 1)}.$$

Идея компенсации *больших* постоянных времени одним регулятором оказывается не реализуемой при наличии у объекта более двух таких постоянных, поскольку уже для компенсации двух постоянных времени объекта с использованием ПИД-регулятора резко снижается помехозащищенность системы.

Для реализации идеи компенсации используют структуру многоконтурного регулирования с вложенными — подчиненными контурами как показано на рис. 10.4, при этом в каждом внутреннем контуре регулятор компенсирует не более двух постоянных времени. Настройку регуляторов такой системы выполняют независимо в каждом контуре.

Известны два способа *оптимальной* настройки регулятора контура: настройка на так называемые **технический** и **симметричный оптимумы**. Выбор способа настройки регуляторов системы зависит от структуры объекта и требуемого качества переходных процессов в системе.

При настройке системы на *технический оптимум* в качестве критерия выдвигается требование — модуль частотной характеристики замкнутого контура быть близок к единице на возможно большем интервале частот. Это требование по существу и есть условие воспроизведения входного сигнала.

Среди звеньев второго и третьего порядка существуют такие, у которых после замыкания частотная характеристика принимает вид, близкий к требуемому.

Рассмотрим, к примеру, два звена: интегрирующее и инерционное, охваченные обратной связью. Передаточная функция и модуль частотной характеристики такого соединения в общем случае принимают вид

$$H(s) = \frac{a_2}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2},$$

$$|H(j\omega)| = \frac{a_2}{\sqrt{a_0^2 \omega^4 + (a_1^2 - 2a_0 a_2) \omega^2 + a_2^2}}. \quad (10.13)$$

Для того чтобы модуль частотной характеристики при малых  $\omega$  был близок к единице, достаточно, чтобы выполнялись условия *оптимальной* настройки:

$$a_1^2 = 2a_0 a_2 \quad (10.14)$$

при этом

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^4 \frac{a_0^2}{a_2^2}}}. \quad (10.15)$$

Еще один пример замкнутого контура, удовлетворяющего требованиям метода:

$$H(s) = \frac{a_3 + a_2 s}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}. \quad (10.16)$$

Если принять условия настройки в виде:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= 2a_0 a_2; \\ a_2^2 &= 2a_1 a_3, \end{aligned} \quad (10.17)$$

то модуль частотной характеристики этого контура будет равен

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2}}{\sqrt{1 + \omega^6 \left(\frac{a_0}{a_3}\right)^2}} \quad (10.18)$$

и при достаточно малых частотах близок к единице.

Настройка замкнутой системы на технический оптимум оказывается невозможной для объектов, содержащих интегрирующие звенья, поскольку применение И-, ПИ-, ПИД-регуляторов для компенсации постоянных времени объекта, приводит систему на границу устойчивости. Действительно, пусть объект имеет передаточную функцию

$$W_o(s) = \frac{k_0}{T_0 s (T_1 s + 1)}.$$

Для компенсации большой постоянной времени инерционного звена объекта следует использовать ПИ-регулятор с

$$W_p(s) = \frac{k_p (T_p s + 1)}{T_p s},$$

и настроить его так, чтобы  $T_p = T_1$ , тогда замкнутый контур приобретает передаточную функцию колебательного звена

$$H(s) = \frac{k}{s^2 + 1}; \quad k = \frac{k_0 k_p}{T_0 T_1}.$$

Для объектов, содержащих интегрирующее звено, настройку регулятора для достижения заданного качества воспроизведения входного сигнала следует осуществлять по критерию *симметричного оптимума*. После чего, логарифмическая амплитудно-частотная характеристика системы приобретает вид симметричный относительно частоты среза и максимум запаса устойчивости по фазе приходится на окрестность частоты среза.

Передаточная функция замкнутого контура и переходная характеристика такой системы принимают *стандартный вид*, что позволяет утверждать: все системы, настроенные на симметричный оптимум, имеют один с точностью до суммы некомпенсированных постоянных времени переходный процесс.

### Примеры:

1. Исследовать возможность применения ПД- и ПИ-регулятора в системе, где объект имеет передаточную функцию

$$W_0(s) = \frac{k_0}{T_0 s + 1}.$$

Применив ПД-регулятор  $W_p(s) = k_p(T_p s + 1)$ , и установив  $T_p \simeq T_0$ , получим, что прямой тракт системы при достаточной точной компенсации оказывается пропорциональным звеном  $W(s) = k_p k_0$ .

При неточной компенсации с ростом времени система ведет себя так же как пропорциональное звено. Установившееся значение реакции системы не зависит от постоянных времени объекта и регулятора и равно

$$W(0) = W_p(0)W_0(0) = k_p(T_p s + 1) \frac{k_0}{T_0 s + 1} \Big|_{s=0} = k_p k_0.$$

Применим для компенсации постоянной времени объекта ПИ-регулятор

$$W_p(s) = \frac{k_p(T_p s + 1)}{T_p s},$$

получим, что прямой тракт системы при достаточной точной компенсации  $T_p \simeq T_0$  оказывается интегрирующим звеном

$$W(s) = \frac{k_p k_0}{T_p s}.$$

При неточной компенсации с ростом времени модель системы так же приобретает свойства интегрирующего звена с той же передаточной функцией.

**2.** Настроить на технический оптимум систему подчиненного регулирования, в которой модель объекта регулирования представлена последовательно соединенными инерционными звеньями с малыми постоянными времени  $T_i$ .

Передаточная функция объекта

$$W_0(s) = k_0 \prod_i \frac{1}{T_i s + 1} = \frac{k_0}{1 + s \sum_i T_i + s^2 \sum_{i,j} T_i T_j + \dots}$$

В силу малости постоянных времени  $W_0(s) \simeq \frac{k_0}{1 + \theta s}$ , где  $\theta = \sum_i T_i$ .

Задачу синтеза решает применение И-регулятора. В самом деле, разомкнутый контур имеет передаточную функцию

$$W_p(s)W_0(s) = \frac{1}{T_p s} \frac{k_0}{1 + \theta s},$$

после замыкания передаточная функция контура примет *стандартный* вид

$$H(s) = \frac{k_0}{\theta T_p s^2 + T_p s + k_0}, \quad (10.19)$$

поэтому воспользуемся условиями настройки контура на технический оптимум  $T_p^2 = 2\theta k_0 T_p$ , чтобы найти параметр настройки И-регулятора  $T_p = 2\theta k_0$ .

В результате такой настройки передаточная функция замкнутой системы принимает *оптимальный* вид

$$H^*(s) = \frac{1}{2\theta^2 s^2 + 2\theta s + 1}, \quad (10.20)$$

зависящий только от суммы малых постоянных времени объекта.

В этих условиях система представлена моделью звена второго порядка с постоянной времени  $T = 1,414\theta$  и коэффициентом затухания  $\zeta = 0,707$ . Переходный процесс в такой системе описывает зависимость

$$h(t) = 1 - \left( \cos 0,707 \frac{t}{\theta} + \sin 0,707 \frac{t}{\theta} \right) \exp \left( -0,707 \frac{t}{\theta} \right), \quad (10.21)$$

на рис. 10.5 это кривая *a*.

**3.** Настроить на технический оптимум систему подчиненного регулирования, в которой объект регулирования представляется последовательно соединенными инерционными звеньями, одно из которых имеет постоянную времени существенно большую всех остальных.

Передаточную функцию объекта можно представить в виде

$$W_0(s) \simeq \frac{k_0}{(T_1 s + 1)(\theta s + 1)},$$

где  $\theta$  — сумма всех остальных малых постоянных времени.

Задачу синтеза решает использование ПИ-регулятора, который позволяет компенсировать большую постоянную времени и выполнить настройку замкнутого контура на технический оптимум. Разомкнутый контур системы имеет передаточную функцию

$$W_p(s)W_o(s) = \frac{k_p(T_p s + 1)}{T_p s} \frac{k_o}{(T_1 s + 1)(\theta s + 1)}.$$

Настроим регулятор так, чтобы  $T_p = T_1$ .

После такой компенсации передаточная функция замкнутого контура принимает *стандартный* вид

$$H(s) = \frac{k_p k_o}{\theta T_1 s^2 + T_1 s + k_o k_p}.$$

Воспользуемся условиями настройки контура на технический оптимум  $T_1^2 = 2\theta k_p k_o T_1$ , чтобы найти еще один параметр настройки ПИ-регулятора:

$$k_p = \frac{T_1}{2\theta k_o}.$$

В результате такой настройки передаточная функция замкнутой системы принимает *оптимальный* вид

$$H^*(s) = \frac{1}{2\theta^2 s^2 + 2\theta s + 1},$$

а значит в системе будет иметь место заданный переходный процесс (см. рис. 10.5, кривая *a*).

**4.** Настроить на технический оптимум систему, в которой объект регулирования представляется последовательно соединенными инерционными звеньями, два из которых имеют постоянные времени существенно большие всех остальных. Передаточную функцию такого объекта можно представить в виде

$$W_o(s) \simeq \frac{k_o}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(\theta s + 1)},$$

где  $\theta$  — сумма всех малых постоянных времени.

Задачу синтеза решает использование ПИД-регулятора, который позволяет компенсировать две большие постоянные времени и выполнить настройку замкнутого контура на технический оптимум. Разомкнутый контур системы имеет передаточную функцию

$$W_p(s)W_o(s) = \frac{k_p(T_{p1} s + 1)(T_{p2} s + 1)}{T_{p1} s} \frac{k_o}{(T_1 s + 1)(1 + \theta s)}.$$

Настроим регулятор так, чтобы  $T_{p1} = T_1$ ,  $T_{p2} = T_2$ .

После такой компенсации передаточная функция замкнутого контура вновь принимает *стандартный* вид

$$H(s) = \frac{k_p k_o}{\theta T_1 s^2 + T_1 s + k_o k_p},$$

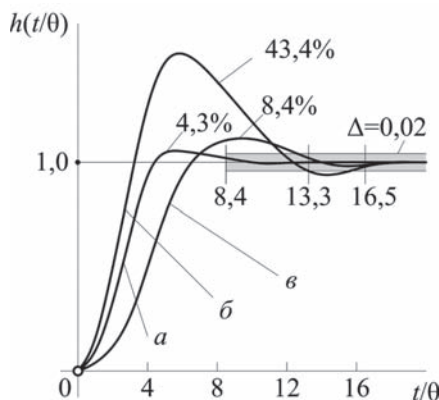


Рис. 10.5

Стандартный вид кривых переходного процесса в системе подчиненного регулирования, если регулятор настроен: на технический оптимум — кривая а; симметричный оптимум — кривая б; симметричный оптимум и имеется сглаживающий фильтр — кривая в.

при этом последний параметр настройки ПИД-регулятора принимает вновь значение

$$k_p = \frac{T_1}{2\theta k_o}.$$

В результате такой настройки передаточная функция замкнутой системы принимает оптимальный вид

$$H^*(s) = \frac{1}{2\theta^2 s^2 + 2\theta s + 1},$$

а значит в системе будет иметь место заданный переходный процесс. Все системы, настроенные на технический оптимум, имеют с точностью до  $\theta$  один и тот же переходный процесс (см. рис. 10.5, кривая а).

5. Рассмотрим объект, модель которого представлена четырьмя инерционными звеньями с постоянными времени:

$$T_1 = 0,2 \text{ с}; T_2 = 0,08 \text{ с}; T_3 = 0,02 \text{ с}; T_4 = 0,01 \text{ с}$$

и общим коэффициентом передачи  $k_o = 1$ .

Исследовать возможность использования трех типов регуляторов для реализации замкнутой системы, настроенной на технический оптимум.

Будем считать, что все постоянные времени малы. В этом случае для решения задачи синтеза следует применить И-регулятор и установить значение постоянной интегрирования регулятора равной

$$T_p = 2\theta k_o = 0,62 \text{ с}; \quad \theta = 0,31 \text{ с}.$$

В результате получим переходный процесс, для которого время регулирования  $t_p = 4,7\theta = 1,5 \text{ с}$ .

Выделим бóльшую постоянную времени  $T_1 = 0,2$  с, считая все остальные постоянные малыми, при этом  $\theta = 0,11$  с. Для решения задачи синтеза следует применить ПИ-регулятор, установить значение постоянной интегрирования регулятора равным  $T_p = 0,2$  с и коэффициент усиления регулятора

$$k_p = \frac{T_p}{2\theta k_o} = 0,91.$$

В результате будет получим переходный процесс, для которого время регулирования  $t_p = 4,7\theta = 0,5$  с.

Выделим теперь две большие постоянные времени

$$T_1 = 0,2 \text{ с и } T_2 = 0,08 \text{ с,}$$

считая все остальные постоянные малыми, при этом  $\theta = 0,03$  с.

Для решения задачи синтеза следует применять ПИД-регулятор, установить значения постоянных времени регулятора равными

$$T_{p1} = 0,2 \text{ с; } T_{p2} = 0,08 \text{ с,}$$

а также коэффициент усиления регулятора

$$k_p = \frac{T_{p1}}{2\theta k_o} = 0,33.$$

В результате получаем переходный процесс, для которого время регулирования  $t_p = 4,7\theta = 0,1$  с.

**6.** Пусть объект регулирования представлен в виде последовательно соединенных инерционных звеньев и звена интегрирования

$$W_o(s) = k_o \prod_i \frac{1}{T_0 s(T_i s + 1)} \simeq \frac{k_o}{T_0 s(\theta s + 1)}, \quad \theta = \sum_i T_i.$$

Для управления в замкнутом контуре применим ПИ-регулятор

$$W_p(s) = \frac{k_p(T_p s + 1)}{T_p s}.$$

Передаточная функция замкнутого контура принимает вид

$$H(s) = \frac{k_p k_o (T_p s + 1)}{T_p T_0 \theta s^3 + (T_p + T_0) s^2 + k_p k_o T_p s + k_o k_p},$$

который может быть оптимизирован условиями настройки на *симметричный* оптимум:

$$\begin{aligned} (T_p T_0)^2 &= 2k_p k_o T_p^2 T_0; \\ (k_p k_o T_p)^2 &= 2k_p k_o T_p T_0 \theta, \end{aligned} \quad (10.22)$$



откуда находим значения параметров регулятора:

$$T_p = 4\theta, \quad k_p = \frac{T_0}{2k_o\theta}. \quad (10.23)$$

После подстановки этих оптимизированных параметров в передаточную функцию замкнутой системы, последняя приобретает *стандартный* вид

$$H^*(s) = \frac{4\theta s + 1}{8\theta^3 s^3 + 8\theta^2 s^2 + 4\theta s + 1}. \quad (10.24)$$

На рис. 10.5, кривая *б* приведен типовой вид переходного процесса замкнутой системы, настроенной на симметричный оптимум, показатели качества этого процесса таковы: время достижения равно  $3,1\theta$  с; перерегулирование составляет  $43,4\%$ ; время регулирования равно  $16,5\theta$  с.

**7.** Настроить на симметричный оптимум систему с объектом, который имеет одну существенную постоянную времени  $T_1$ , а все другие постоянные времени сравнительно малы, в сумме меньше чем  $T_1$ .

Для компенсации одной постоянной следует применять ПИД-регулятор. Настройку этого регулятора выполняют по схеме, описанной в примере **6**.

Для переходного процесса системы, настроенной на симметричный оптимум, характерно значительное перерегулирование, которое может быть значительно снижено, если вне замкнутого контура последовательно поставить сглаживающий фильтр низких частот — инерционное звено с единичным коэффициентом передачи и постоянной времени  $4\theta$ . Передаточная функция оптимизированного контура и фильтра принимает *стандартный* вид

$$H^*(s) = \frac{1}{8\theta^3 s^3 + 8\theta^2 s^2 + 4\theta s + 1}. \quad (10.25)$$

Переходный процесс в такой системе показан на рис 10.5, кривая *в*, для него время достижения равно  $7,6\theta$  с; перерегулирование составляет  $8,1\%$ ; время регулирования равно  $13,3\theta$  с.

## 10.4. УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Передаточная функция неизменяемой части системы задана выражением

$$W(s) = \frac{45}{s(0,2s + 1)^2}.$$

Выбрать последовательное корректирующее звено такое, чтобы обеспечить перерегулирование порядка  $20\%$ , время регулирования не более  $0,2$  с при общем коэффициенте усиления прямого тракта не менее  $120$ .

**2.** Определить для условий упражнения **1** структуру и параметры:

- параллельного корректирующего звена;
- корректирующей обратной связи,

которые обеспечивают те же показатели качества, что и последовательная коррекция.

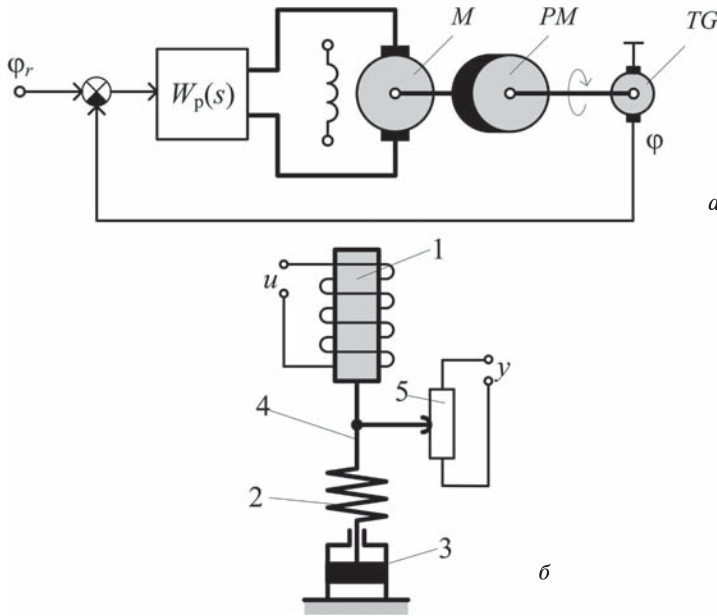


Рис. 10.6

а — структурная схема следящей системы; б — схема электромеханического регулятора.

3. На рис. 10.6, а показана схема следящей системы. Разница углов поворота задающей и исполнительной осей усиливается, а затем используется как входной сигнал управляющего звена, которое выполняет одновременно и корректирующие функции. Передаточная функция разомкнутого тракта следящей системы задана выражением

$$W(s) = \frac{0,155k}{s(0,15s + 1)(0,04s + 1)},$$

где  $k$  — коэффициент усиления активного корректирующего звена системы.

Определить структуру и параметры последовательного корректирующего звена, которое позволяет системе обрабатывать ступенчатое воздействие за время не более 0,7 с, иметь перерегулирование не более 25% и коэффициент скоростной ошибки должен быть не больше 0,08.

4. На рис. 10.6, б приведена схема электромеханического регулятора. Входной сигнал регулятора  $u$  — напряжение подаваемое на электромагнит, сердечник 1 которого выполняет регулирующее перемещение. Для гашения колебаний сердечника и пружины 2, предусмотрено демпфирующее устройство 3. Перемещение штока 4 приводит к изменению выходного сигнала  $y$  регулятора, снимаемого с потенциометра 5.

Составить внешнюю модель этого устройства и убедиться в том, что это устройство является ПИ-регулятором, а при отсутствии пружины — И-регулятором.

5. Пассивные корректирующие звенья выполняют в виде  $RC$ -четырёхполюсников. Изобразить схемы четырёхполюсников, обладающих передаточными функциями:

- $\frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$ ;
- $\frac{1 - T_1 s}{T_2 s + 1}$ ;
- $\frac{(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)}{(T_2 s + 1)(T_4 s + 1)}$ .

Построить частотные характеристики этих звеньев и определить  $RC$ -параметры четырёхполюсников.

6. Построить качественно переходные процессы обработки прямоугольного импульса типовыми регуляторами. Построить модели реальных регуляторов и найти их частотные характеристики.

7. Выполнить процедуру синтеза замкнутой системы, предназначенной для обработки линейного задающего сигнала с показателями качества:  $\sigma \leq 20\%$ ;  $t_p < 0,8$  с;  $s_1 \leq 0,06$  с<sup>-1</sup>, если передаточная функция неизменяемой части контура управления задана выражением

$$W(s) = \frac{30}{s(0,25s + 1)(0,05s + 1)(0,08s + 1)}.$$

8. Для объекта с передаточной функцией

$$\frac{1}{(1 + Ts)^3}$$

построить переходную характеристику, определить показатели  $T$ ,  $r$ ,  $K$ .

Определить методом Циглера–Никольса показатели  $k^*$ ,  $T^*$ . Найти параметры ПИД-регулятора по показателям  $r$ ,  $K$  и  $k^*$ ,  $T^*$ , сравнить результаты настройки по двум правилам путем моделирования переходных процессов замкнутой системы.

9. Синтезировать контур регулирования тока в системе *тиристорный преобразователь-двигатель*, структурная модель которой представлена на рис. 10.7, а. В этой модели передаточная функция:

тиристорного преобразователя

$$W_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, \quad T_1 = 0,01 \text{ с};$$

якорной цепи двигателя постоянного тока с независимым возбуждением

$$W_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s + 1}.$$

Здесь  $T_2$  — электромагнитная постоянная времени двигателя и значительно превосходит  $T_1$  — постоянную времени тиристорного преобразователя.

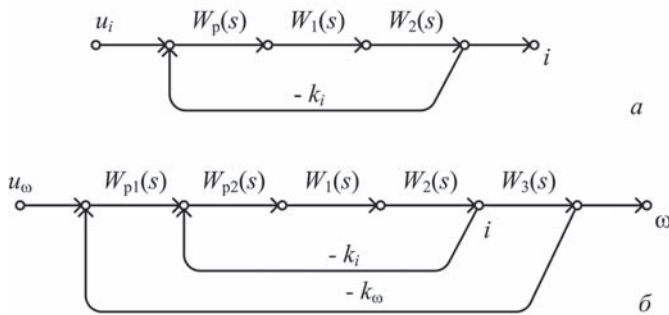


Рис. 10.7

Структурные модели систем: а — тиристорный преобразователь-двигатель;  
 б — регулирование скорости двигателя постоянного тока

**10.** На рис. 10.7, б приведена структурная модель системы регулирования скорости двигателя постоянного тока. Система имеет два регулятора с последовательным подчинением: внутренний контур регулирования тока, описание которого дано в упражнении 9, и внешний контур регулирования скорости. Передаточная функция звена, моделирующего связь между током якорной цепи и частотой вращения имеет вид

$$W_2(s) = \frac{1}{T_3 s}.$$

Выбрать структуру регулятора скорости и подобрать его параметры так, чтобы осуществить настройку системы на *технический оптимум*.

## СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

- Методы аналитического конструирования регуляторов
- Аналитический синтез линейного оптимального регулятора
- Наблюдатели состояния линейной системы
- Синтез замкнутой системы с наблюдателем состояния
- Упражнения

### 11.1. МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТОРОВ

Методы решения задачи синтеза замкнутых автоматических систем с заданным качеством управления, использующие внутренние модели системы, создавались как следствие *алгебраизации* теории управления, предпринятой Р. Калманом и А. М. Лётовым в шестидесятые годы прошлого столетия.

Рассмотрим вполне управляемый и вполне наблюдаемый линейный объект управления с постоянными параметрами

$$\Sigma^{(n)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}): \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); & \mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Проблема синтеза системы управления состоит в том, чтобы целенаправленно изменить состояние объекта, переведя его из начального состояния  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$  в произвольное заданное конечное состояние  $\mathbf{x}^*$ , так, чтобы процесс перехода удовлетворял некоторым заданным показателям качества. Решение проблемы синтеза управления состоит в том, чтобы найти управление, линейно зависящее от координат состояния системы, которое осуществляло бы требуемое изменение состояний системы с заданным качеством переходного процесса.

Не ограничивая общности, рассмотрим систему со скалярным входом

$$u(t) = u_0(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (11.1)$$

где  $u_0(t)$  — входной командный сигнал;  $\mathbf{K}$  — искомая матрица коэффициентов обратной связи.

После замыкания автоматическая система принимает структуру, показанную на рис. 11.1, и ее движение описывает линейное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(u_0(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t)) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u_0(t); & \mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (11.2)$$

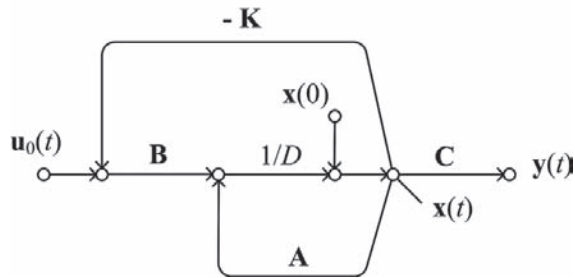


Рис. 11.1

Структура замкнутой системы с линейно зависящим от координат состояния управлением.

Динамические свойства такой замкнутой системы полностью определяются свойствами матрицы  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ , в частности, ее характеристическими числами. Но можно ли разрешить задачу синтеза для произвольно заданного качества переходных процессов?

**Теорема.** *Характеристические числа замкнутой системы управления с матрицей  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  могут быть произвольно размещены на комплексной плоскости, путем соответствующего выбора матрицы обратной связи  $\mathbf{K}$ , тогда и только тогда, когда система  $\Sigma^{(n)}$ :  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  вполне управляема.*

Доказательство этого утверждения, без ограничения общности, приведем для случая, когда система имеет скалярный вход. Как было показано в гл. 2, модель любой вполне управляемой линейной системы можно линейным преобразованием координат состояния привести к каноническому виду, например, к виду Коши. На этом основании положим, что исходная матрица состояния объекта уже имеют канонический вид Коши:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку характеристические числа линейной системы не изменяются при невырожденном линейном преобразовании координат, то характеристический многочлен исходной системы равен

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_n.$$

$$\mathbf{D}_n = \lambda \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix} +$$

$$+ a_0 (-1)^{n+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} D_n &= \lambda D_{n-1} + a_0 = \lambda(D_{n-2} + a_1) + a_0 = \\ &= \lambda(\lambda(D_{n-3} + a_2) + a_1) + a_0 = \dots \\ \dots &= \lambda(\lambda(\lambda(\dots(\lambda D_0 + a_{n-1})\dots) + a_2) + a_1) + a_0, \quad \mathbf{D}_0 = 1. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0.$$

*Коэффициенты характеристического полинома вполне управляемой системы совпадают с точностью до знака с элементами последней строки канонической формы ее матрицы.*

Теперь замкнем систему, введя линейную обратную связь по состоянию

$$u(t) = u_0(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{K} = (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n),$$

где  $k_1, k_2, \dots, k_n$  — коэффициенты обратной связи по каждой координате состояния.

В этих условиях матрица состояния замкнутой системы принимает канонический вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{BK} &= \mathbf{A} - (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1)^T (k_1 \ k_2 \ k_3 \ \dots \ k_n) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_0 + k_1) & -(a_1 + k_2) & -(a_2 + k_3) & \dots & -(a_{n-1} + k_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому характеристический полином такой системы может быть легко определен:

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) &= \\ &= \lambda^n + (a_{n-1} + k_n) \lambda^{n-1} + (a_{n-2} + k_{n-1}) \lambda^{n-2} + \dots \\ &\dots + (a_1 + k_2) \lambda + (a_0 + k_1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что подбором чисел  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , можно сформировать любой характеристический многочлен, а значит корни характеристического уравнения замкнутой системы могут быть заданы произвольно.

Желаемые динамические свойства системы, а следовательно, и желаемое качество переходных процессов может быть заложено в систему путем формирования линейной обратной связи, значение которой может быть найдено аналитически. Так, если желаемый характеристический полином  $\varphi^*(\lambda)$  приравнять к характеристическому полиному замкнутой системы  $\varphi(\lambda; \mathbf{K})$ , получим *условие разрешимости задачи синтеза*:

$$\varphi(\lambda; \mathbf{K}) = \varphi^*(\lambda). \quad (11.3)$$

Число уравнений относительно неизвестных коэффициентов матрицы обратной связи обычно меньше числа самих неизвестных, поэтому выбор закона управления часто неоднозначен. Устранить неопределенность выбора можно, потребовав от системы дополнительных свойств, например, сравнивая переходные процессы по некоторым числовым показателям и выбирая наилучший.

В частном случае, для системы со скалярным входом, условия разрешимости задачи синтеза однозначно разрешаются *формулой Акермана*

$$\mathbf{K} = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1) \left( \mathbf{B} : \mathbf{A}\mathbf{B} : \mathbf{A}^2\mathbf{B} : \dots : \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{B} \right)^{-1} \varphi^*(\mathbf{A}). \quad (11.4)$$

### Примеры:

1. Осуществить стабилизацию положения равновесия объекта, который без управления является неустойчивым. Объект управления задан матрицами:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Спектр характеристических чисел этого объекта  $\{0, -1, -2, 2\}$ . Осуществить синтез замкнутой системы управления этим объектом, с целью сделать его асимптотически устойчивым и чтобы четыре полюса этой системы были действительными и равными  $-2$ .

Чтобы синтез замкнутой системы управления с заданным качеством был возможен, следует убедиться в том, что объект вполне управляем. Используем критерий Калмана. Матрица управляемости объекта имеет вид

$$\left( \mathbf{B} : \mathbf{A}\mathbf{B} : \mathbf{A}^2\mathbf{B} : \mathbf{A}^3\mathbf{B} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица, квадратная  $4 \times 4$ , ее определитель не равен нулю, следовательно, ранг матрицы управляемости равен четырем — размерности объекта. Объект вполне управляем. Задача синтеза разрешима.

Желаемый характеристический полином замкнутой системы, должен иметь вид

$$\varphi^*(\lambda) = (\lambda + 2)^4 = \lambda^4 + 8\lambda^3 + 24\lambda^2 + 32\lambda + 16.$$



Пусть матрица неизвестных коэффициентов обратной связи

$$\mathbf{K} = (k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4)$$

тогда характеристический полином замкнутой системы принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda; \mathbf{K}) &= \det(\lambda \mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ k_1 & \lambda + k_2 + 1 & k_3 & k_4 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 0 & -4 & \lambda \end{pmatrix} = \\ &= \lambda^4 + (k_2 + 1)\lambda^3 + (k_1 - 4)\lambda^2 - 4(k_2 + k_4 + 4)\lambda - 4(k_1 + k_3). \end{aligned}$$

Искомые коэффициенты матрицы обратной связи удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} 8 &= k_2 + 1; \\ 24 &= k_1 - 4; \\ 32 &= -4(k_2 + k_4 + 1); \\ 16 &= -4(k_1 + k_3). \end{aligned}$$

Откуда находим, что  $k_1 = 28$ ,  $k_2 = 7$ ,  $k_3 = -32$ ,  $k_4 = -16$ .

Искомое управление стабилизации принимает вид

$$u(t) = -28x_1(t) - 7x_2(t) + 32x_3(t) + 16x_4(t).$$

Структура синтезированной системы представлена на рис. 11.2, а

**2.** Рассмотрим общий случай синтеза, когда система имеет векторный вход. Пусть разомкнутая система задана матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Осуществить синтез так, чтобы замкнутая система была эквивалентна звену второго порядка с комплексными полюсами  $\lambda_{1,2} = 0,3 \pm j0,5$ .

Матрица обратной связи  $\mathbf{K} = (k_{i,j})$  имеет размер  $2 \times 2$  и содержит четыре неизвестных элемента. Характеристический многочлен замкнутой системы

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda; \mathbf{K}) &= \det(\lambda \mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = \\ &= \lambda^2 + (k_{11} + k_{21} - 0,2k_{12} + 0,8k_{22} + 3)\lambda + \\ &+ (k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} + 2k_{11} + 2k_{21} - 0,2k_{12} + 0,8k_{22} + 2). \end{aligned}$$

Желаемый характеристический многочлен замкнутой системы имеет вид

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 - 0,6\lambda + 0,34.$$

Из условия синтеза следует, что:

$$k_{11} + k_{21} - 0,2k_{12} + 0,8k_{22} + 3 = -0,6;$$

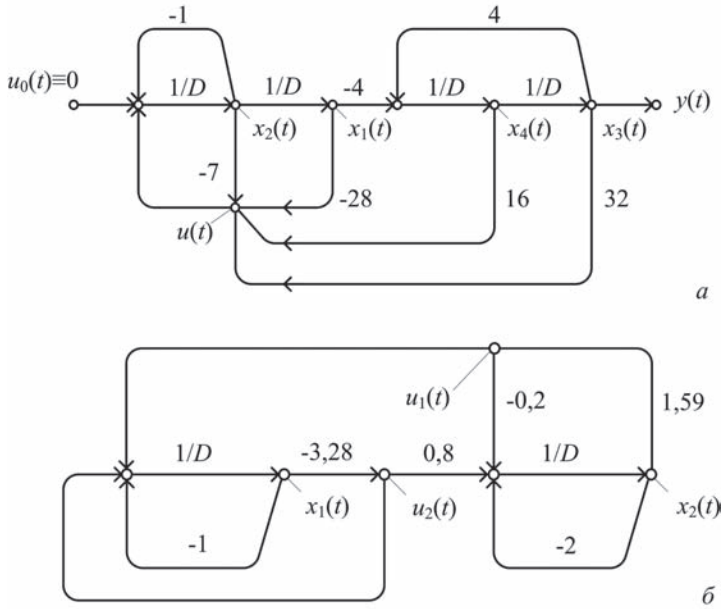


Рис. 11.2

а — структура синтезированной системы; б — структура замкнутой системы стабилизации.

$$k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} + 2k_{11} + 2k_{21} - 0,2k_{12} + 0,8k_{22} + 2 = 0,34.$$

Имеем два уравнения относительно четырех неизвестных, поэтому два неизвестных могут быть заданы произвольно. Например, положим  $k_{12} = k_{11} = 0$ , тогда уравнения относительно оставшихся неизвестных однозначно разрешимы:

$$\begin{aligned} k_{21} + 0,8k_{22} &= -3,6; \\ 2k_{21} + 0,8k_{22} &= -1,66. \end{aligned}$$

Находим, что  $k_{21} = 1,94$  и  $k_{22} = -6,925$ .

Положив  $k_{11} = k_{22} = 0$ , получим иные соотношения

$$\begin{aligned} k_{21} - 0,2k_{12} &= -3,6; \\ k_{21}k_{12} + 2k_{21} - 0,2k_{12} &= -1,66 \end{aligned}$$

и решение:  $k_{12} = 1,59$ ;  $k_{21} = -3,28$  или  $k_{12} = 17,4$ ;  $k_{21} = -0,12$ .

Искомая структура замкнутой системы стабилизации по одному из решений, когда  $u_1 = 1,59x_2$ ;  $u_2 = -3,28x_1$ , приведена на рис. 11.2, б.

**3.** Объект управления из примера 1 имеет скалярный вход, поэтому решить ту же задачу синтеза, используя формулу (11.4) Акермана.

В условиях примера 1 формула Акермана принимает вид

$$\mathbf{K} = (0 \ 0 \ 0 \ 1) \left( \mathbf{B}: \mathbf{A}\mathbf{B}: \mathbf{A}^2\mathbf{B}: \mathbf{A}^3\mathbf{B} \right)^{-1} \varphi^*(\lambda) \Big|_{\lambda=\mathbf{A}}.$$

Обратная матрица управляемости объекта

$$\mathbf{W}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -0,25 \\ 0 & 0 & -0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матричный вид желаемого характеристического многочлена таков

$$\varphi^*(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^4 + 8\mathbf{A}^3 + 24\mathbf{A}^2 + 32\mathbf{A} + 16\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 16 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -112 & -28 & 128 & 64 \\ -256 & -84 & 256 & 128 \end{pmatrix}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= (0 \ 0 \ 0 \ 1) \mathbf{W}^{-1} \varphi^*(\mathbf{A}) = \\ &= (0 \ 0 \ -0,25 \ 0) \varphi^*(\mathbf{A}) = (28 \ 7 \ -32 \ -16). \end{aligned}$$

4. Линейный объект управления представлен двумя инерционными звеньями с постоянными времени 1 и 2 с. Осуществить синтез замкнутой системы управления этим объектом так, чтобы после замыкания система генерировала гармонические колебания с частотой  $3\text{ с}^{-1}$ .

Если координаты состояния выбраны так, что  $x_1$  — выходной сигнал объекта, а  $x_2$  — выход первого звена, то модель объекта управления принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -0,5x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно формуле Акермана искомые коэффициентами обратной связи удовлетворяют соотношению

$$\mathbf{K} = (k_1 \ k_2) = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} (\mathbf{A}^2 + 9\mathbf{E}).$$

После соответствующих преобразований находим, что систему следует замкнуть с коэффициентами обратной связи  $k_1 = 18,5$ ;  $k_2 = -1,5$ .

5. Осуществить синтез системы управления объектом с передаточной функцией  $W(s) = \frac{1}{s^2}$  так, чтобы после замыкания система имела передаточную функцию

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 25}.$$

Внутренняя модель системы в канонической форме задана матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

После замыкания система должна иметь характеристический многочлен

$$\varphi^* = \lambda^2 + 6\lambda + 25.$$

Воспользуемся формулой Акермана для определения матрицы обратной связи:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= (k_1 \ k_2) = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} (\mathbf{A}^2 + 6\mathbf{A} + 25\mathbf{E}) = \\ &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} 25 & 6 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = (25 \ 6). \end{aligned}$$

Искомые коэффициенты обратной связи  $k_1 = 25$ ;  $k_2 = 6$ .

## 11.2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЛИНЕЙНОГО ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА

Характерной особенностью решенных задач аналитического синтеза оказывается безусловная возможность достижения цели управления с любым качеством, сколь угодно быстро и притом неоднозначным образом. Эти *нереальные* возможности возникают потому, что в постановке задачи синтеза нет ограничивающих условий физической реализуемости процесса управления, например, нет ограничений на изменение фазовых координат, на управление и энергию движения. В реальных системах, имеют место различные ограничения, поэтому качество процесса управления также оказывается ограниченным.

Неоднозначность решения задачи синтеза можно исключить, используя неединственность решения как возможность выбора среди различных движений системы наилучшего в том или ином смысле движения.

Такую постановку задачи называют *задачей аналитического синтеза оптимальных регуляторов*. Она была сформулирована А. М. Лётовым (1960).

В качестве критерия качества движения в общем случае используют функционал, который интегрально характеризует качество переходных процессов, энергетические затраты на движение и меру финальной близости к цели движения:

$$J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = 0,5 \int_0^T (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{R}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}_2 \mathbf{u}(t)) dt + \mathbf{x}^T(T) \mathbf{R}_3 \mathbf{x}(T), \quad (11.5)$$

где  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$  — положительно определенные симметрические матрицы;  $\mathbf{R}_3$  — положительная полуопределенная матрица.

Отметим еще раз, что выражение  $\mathbf{x}^T(t)\mathbf{R}_1\mathbf{x}(t)$  в функционале характеризует текущее отклонение траектории от цели движения, а составляющая

$$\int_0^T \mathbf{x}^T(t)\mathbf{R}_1\mathbf{x}(t)dt \quad (11.6)$$

является интегральной квадратичной оценкой качества переходных процессов.

Задача аналитического синтеза оптимального регулятора состоит в том, чтобы найти для системы

$$\Sigma^{(n)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}): \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

такое управление  $\mathbf{u}^*(t)$ , которое переводит систему из начального состояния  $\mathbf{x}^0$  в состояние покоя  $\mathbf{x}^* = 0$  за время  $T$  так, что критерий качества движения принимает наименьшее значение

$$J(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) = \min_{\mathbf{u}(t)} \mathbf{J}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \quad (11.7)$$

При этом функции  $\mathbf{x}^*(t)$ ,  $\mathbf{u}^*(t)$  называют соответственно *оптимальной траекторией* и *оптимальным управлением*.

Решение задачи оптимального синтеза, найденное Лётовым, имеет вид линейной формы от вектора состояния системы

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t). \quad (11.8)$$

Рассмотрим, не ограничивая общности результатов, задачу синтеза оптимального регулятора с критерием качества, не содержащим оценку промаха траектории в конце движения.

Для отыскания структуры оптимального регулятора, которая определяется матрицей обратных связей  $\mathbf{K}$ , воспользуемся алгоритмом на основе *принципа максимума Л. С. Понтрягина* (см. гл. 14).

1°. Составим гамильтониан задачи

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \psi) = -0,5(\mathbf{x}^T\mathbf{R}_1\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}_2\mathbf{u}) + \psi^T(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}). \quad (11.9)$$

2°. Максимум гамильтониана на свободном от ограничений множестве управлений достигается, когда

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \psi) = -\mathbf{R}_2\mathbf{u} + \mathbf{B}^T\psi = 0 \quad (11.10)$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{u}^2} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \psi) = -\mathbf{R}_2$$

является отрицательно определенной матрицей. Что в данном случае действительно имеет место, поэтому

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{B}^T \psi(t). \quad (11.11)$$

3°. Вспомогательная переменная  $\psi(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \psi) = \mathbf{R}_1 \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \psi. \quad (11.12)$$

Подставив управление  $\mathbf{u}^*(t)$  в уравнение движения системы, получим вместе с уравнением для вспомогательной переменной систему линейных однородных дифференциальных уравнений порядка  $2n$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{B}^T \psi(t); \\ \dot{\psi}(t) &= \mathbf{R}_1 \mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T \psi(t) \end{aligned} \quad (11.13)$$

с двумя граничными условиями:  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ ,  $\psi(T) = 0$ , последнее носит название **условия трансверсальности**. Это условие определяется выбранным критерием оптимальности.

Лётов показал, что вектор состояния системы и вспомогательный вектор линейно связаны

$$\psi(t) = -\mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (11.14)$$

где  $\mathbf{P}(t)$  — матрица переменных коэффициентов, которые зависят не только от текущего, но и от конечного времени  $T$ , однако не зависят от начальных условий  $\mathbf{x}(0)$ .

Знание матрицы  $\mathbf{P}(t)$  завершит синтез регулятора. Чтобы найти матрицу  $\mathbf{P}(t)$ , продифференцируем по  $t$  линейное соотношение между вектором состояния системы и вспомогательным вектором, затем воспользовавшись дифференциальными уравнениями для этих переменных (11.13), получим соотношение, справедливое для всех  $t \geq 0$

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) = -\dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{P}(t) (\mathbf{A} \mathbf{x}(t) - \mathbf{B} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t)).$$

Из этого соотношения следует, что искомая матрица  $\mathbf{P}(t)$  удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{R}_1 = 0, \quad (11.15)$$

которое классифицируется как уравнение *типа Риккати*. Для этого уравнения имеет место граничное условие  $\mathbf{P}(T) = 0$ .

Матрица  $\mathbf{P}(t)$  симметрическая, поскольку транспонированная к ней матрица также удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати с тем же граничным условием и поэтому в силу единственности решения совпадает с  $\mathbf{P}(t)$ .

Матричное уравнение Риккати представляет собой систему из  $0,5n(n+1)$  дифференциальных уравнений первого порядка с переменными параметрами, решение которых ищут численными методами. Найденное решение  $\mathbf{P}(t)$  позволяет определить единственное искомое оптимальное управление

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t), \quad (11.16)$$

которое оказывается линейным относительно вектора состояния системы.

Матрицу коэффициентов обратных связей замкнутой системы управления определяет выражение

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t). \quad (11.17)$$

В том случае, когда для линейной стационарной системы выбран критерий качества с постоянными матрицами  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$ ,  $\mathbf{R}_3$  и, кроме того, время движения достаточно велико, то матрица  $\mathbf{P}(t)$  — симметрическая, положительно определенная оказывается почти постоянной. В пределе — постоянной.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t) = \tilde{\mathbf{P}}.$$

Матрица  $\tilde{\mathbf{P}}$  удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{R}_1 = 0. \quad (11.18)$$

Структуру оптимального регулятора в этом случае определяет постоянная матрица коэффициентов обратных связей

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{P}}. \quad (11.19)$$

Движение замкнутой системы с найденным линейным оптимальным регулятором, описывается матричным линейным однородным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0. \quad (11.20)$$

Это движение асимптотически устойчиво.

**Пример.** Для системы стабилизации положения, модель которой задается матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

выполнить синтез регулятора, так чтобы критерий качества управления

$$J = 0,5 \int_0^{\infty} (x_1^2(t) + 100u^2(t)) dt$$

принимал наименьшее значение на траектории движения системы из произвольного начального состояния в положение покоя — начало координат.

Искомая матрица  $\tilde{\mathbf{P}}$ , определяющая структуру регулятора, удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению

$$\tilde{\mathbf{P}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}} - 0,01 \tilde{\mathbf{P}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0,8 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Это уравнение в скалярной форме принимает вид

$$1 - 64 \cdot 10^{-4} p_{12}^2 = 0;$$

$$\begin{aligned} p_{11} - 5p_{12} - 64 \cdot 10^{-4} p_{12} p_{22} &= 0; \\ 2p_{12} + 10p_{22} - 64 \cdot 10^{-4} p_{22}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений, с учетом положительной определенности матрицы  $\tilde{\mathbf{P}}$ , находим, что  $p_{11} = 62,7$ ;  $p_{12} = p_{21} = 12,5$ ;  $p_{22} = 2,5$ .

А затем находим матрицу обратных связей

$$\mathbf{K} = 0,01 \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{P}} = 0,01 \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 62,7 & 12,5 \\ 12,5 & 2,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,02 \end{pmatrix}$$

и оптимальное управление  $u^*(t) = -0,1x_1(t) - 0,02x_2(t)$ .

После замыкания система будет иметь характеристический многочлен

$$\det(\lambda \mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = \lambda^2 + 5,016\lambda + 0,08.$$

Полюсы замкнутой системы расположены на действительной оси в точках  $\lambda_1 = -0,016$ ,  $\lambda_2 = -5$ , что обеспечивает замкнутой системе асимптотическую устойчивость и длительность 187,5 с апериодического переходного процесса стабилизации с погрешностью  $\Delta = 0,05$ .

### 11.3. НАБЛЮДАТЕЛИ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Для решения задачи синтеза предполагается, что все координаты состояния доступны для измерения, однако, в реальности такое предположение чаще всего невыполнимо. Обычно доступна для измерения лишь линейная комбинация переменных состояния

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t).$$

*Задача восстановления* координат состояния системы состоит в том, чтобы найти оценки  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  вектора состояния  $\mathbf{x}(t)$  по результатам измерения переменной  $\{\mathbf{y}(t), t \geq 0\}$ .

Решение задачи восстановления для линейной системы

$$\begin{aligned} \Sigma^{(n)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}): \quad \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

возможно осуществить путем создания дополнительной линейной системы, выход которой — оценки вектора состояния основной системы. Такую дополнительную систему называют *наблюдателем*.

**Определение.** Систему

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}\mathbf{y}(t) + \mathbf{N}\mathbf{u}(t) \quad (11.21)$$

называют *асимптотическим наблюдателем полного порядка системы*  $\Sigma^{(n)}$ :  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ , если для любого начального состояния  $\mathbf{x}(0)$ , и для всех управлений



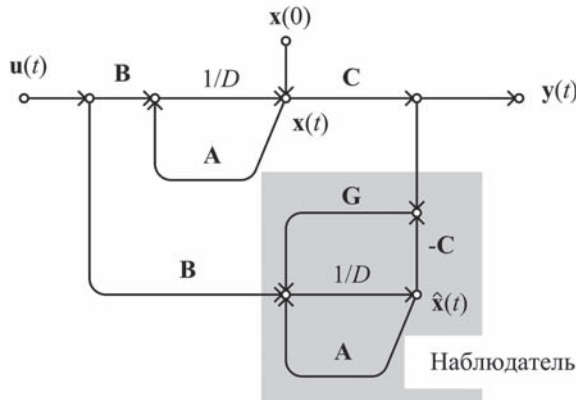


Рис. 11.3  
Структура системы и ее наблюдателя

$u(t)$ ,  $t \geq 0$  оценка  $\hat{x}(t)$  с ростом времени асимптотически приближается к вектору состояния  $x(t)$ .

Найдем структуру асимптотического наблюдателя, для чего определим ошибку восстановления

$$\delta(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{11.22}$$

и найдем модель ее изменения

$$\frac{d}{dt}(x(t) - \hat{x}(t)) = \dot{\delta}(t) = (A - GC)x(t) - F\hat{x}(t) + (B - N)u(t),$$

а затем потребуем, чтобы  $\hat{x}(t) = x(t)$  при всех  $u(t)$ ,  $t \geq 0$  и  $x(0) = \hat{x}(0)$ . Это равенство возможно, когда

$$F = (A - GC), \quad N = B.$$

Таким образом, структуру асимптотического наблюдателя полного порядка для линейной системы  $\Sigma^{(n)}$ :  $(A, B, C)$  определяет модель:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - GC)\hat{x}(t) + Gy(t) + Bu(t), \quad \hat{x}(0) = 0. \tag{11.23}$$

Наблюдатель такой структуры представлен на рис. 11.3.

Задача синтеза наблюдателя системы состоит в том, чтобы найти матрицу  $G$ . Это возможно сделать, исходя из условия асимптотической сходимости оценки  $\hat{x}(t)$  к вектору состояния  $x(t)$  при любых начальных состояниях наблюдателя и системы.

Действительно, ошибка восстановления удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= (Ax(t) + Bu(t)) - ((A - GC)\hat{x}(t) + Gy(t) + Bu(t)) = \\ &= (A - GC)\delta(t); \quad \delta(0) = x(0). \end{aligned} \tag{11.24}$$

Это дифференциальное уравнение — линейное однородное с матрицей  $(A - GC)$  и ненулевым начальным условием, а поэтому асимптотическая сходимость его решения —  $\delta(t)$  к нулю возможна тогда и только тогда, когда собственные числа матрицы

$(\mathbf{A} - \mathbf{GC})$ , которые называют *полюсами наблюдателя*, располагаются в левой полуплоскости.

*Задача синтеза наблюдателя полного порядка* для линейной системы с произвольно заданным качеством переходных процессов имеет свое решение, когда эта система вполне наблюдаема.

**Теорема.** *Характеристические числа асимптотического наблюдателя системы могут быть произвольно размещены на комплексной плоскости, путем соответствующего выбора матрицы  $\mathbf{G}$ , тогда и только тогда, когда система вполне наблюдаема.*

Для доказательства этого утверждения воспользуемся, доказанной ранее, теоремой о синтезе регулятора.

Известно, что собственные числа матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^T$  совпадают, следовательно, матрицы  $(\mathbf{A} - \mathbf{GC})$  и  $(\mathbf{A} - \mathbf{GC})^T$  имеют одни и те же собственные числа. По теореме о синтезе регулятора для свободного выбора собственных чисел матрицы  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  требуется лишь управляемость пары  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ .

Применим эту теорему к паре  $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ . Если пара  $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$  вполне управляема, то свободный выбор собственных чисел матрицы

$$\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{G}^T = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})^T,$$

а с ней и матрицы  $(\mathbf{A} - \mathbf{GC})$  возможен. Но в силу теоремы Калмана о двойственности свойств управляемости и наблюдаемости пара  $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$  вполне управляема, тогда и только тогда, когда пара  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  вполне наблюдаема. Что и завершает доказательство.

Структура наблюдателя полного порядка очевидно избыточна, она позволяет определить и те координаты состояния, которые доступны для измерения. Асимптотические наблюдатели линейной системы, в которых вычисляют только неизмеряемые координаты состояния системы, называют **наблюдателями Люинбергера** (*D. G. Luengerger*, 1968).

Пусть по-прежнему рассматриваем линейную систему  $n$ -го порядка

$$\Sigma^{(n)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}): \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}^0, \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{aligned}$$

у которой вектор выхода  $\mathbf{y}(t)$  имеет  $m$  измеряемых координат.

Введем в рассмотрение вспомогательный вектор  $\mathbf{r}(t)$  с  $(n - m)$  координатами и матрицу  $\mathbf{V}$  такую, чтобы  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{V}\mathbf{x}(t)$  и квадратная блочная матрица

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}$$

оказалась бы невырожденной. Тогда вектор состояния системы может быть представлен в виде

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{r}(t) \end{pmatrix}. \quad (11.25)$$

Обратную матрицу в этом выражении запишем в блочном виде  $(\mathbf{L}_1 \ \mathbf{L}_2)$ , что позволит вектор состояния представить в виде линейной формы от переменных  $\mathbf{y}(t)$ ,  $\mathbf{r}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{L}_1\mathbf{y}(t) + \mathbf{L}_2\mathbf{r}(t). \quad (11.26)$$

Предположим, что наблюдатель для вектора  $\mathbf{r}(t)$  синтезирован, тогда искомым наблюдателем для вектора состояния системы однозначно определяются через измерения вектора  $\mathbf{y}(t)$  и оценку вспомогательного вектора выхода  $\hat{\mathbf{r}}(t)$ :

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{L}_1\mathbf{y}(t) + \mathbf{L}_2\hat{\mathbf{r}}(t). \quad (11.27)$$

Найдем структуру наблюдателя вспомогательного вектора  $\mathbf{r}(t)$ . Производная по времени этого вектора удовлетворяет соотношению

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{V}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) = \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{L}_1\mathbf{y}(t) + \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{L}_2\mathbf{r}(t) + \mathbf{V}\mathbf{B}\mathbf{u}(t).$$

На этом основании составим модель наблюдателя вспомогательного вектора в виде

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}}(t) = \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{L}_1\mathbf{y}(t) + \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{L}_2\mathbf{r}(t) + \mathbf{V}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}\frac{d}{dt}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)). \quad (11.28)$$

Найдем в этом уравнении выражение для производной по времени от  $\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)) &= \dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) = \\ &= \dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L}_1\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L}_2\hat{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Подставим это выражение в модель наблюдателя вспомогательного вектора и выполним необходимые алгебраические преобразования

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{r}}}(t) - \mathbf{G}\dot{\mathbf{y}}(t) &= (\mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{L}_2 - \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L}_2)(\mathbf{r}(t) - \mathbf{G}\mathbf{y}(t)) + \\ &+ (\mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{L}_1 + \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{L}_2\mathbf{G} - \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L}_1 - \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L}_2\mathbf{G})\mathbf{y}(t) + \\ &+ (\mathbf{V}\mathbf{B} - \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{B})\mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Обозначив  $\hat{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{G}\mathbf{y}(t) = \mathbf{z}(t)$ , получим дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями для новой вспомогательной переменной

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = (\mathbf{V} - \mathbf{G}\mathbf{C})(\mathbf{A}\mathbf{L}_2\mathbf{z}(t) + (\mathbf{A}\mathbf{L}_1 + \mathbf{A}\mathbf{L}_2\mathbf{G})\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{z}(0) = 0. \quad (11.29)$$

Теперь искомые асимптотические оценки вектора состояния системы могут быть вычислены из соотношения

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{L}_1\mathbf{y}(t) + \mathbf{L}_2(\mathbf{z}(t) + \mathbf{G}\mathbf{y}(t)) = \mathbf{L}_2\mathbf{z} + (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2\mathbf{G})\mathbf{y}(t). \quad (11.30)$$

Структура наблюдателя Люинбергера приведена на рис. 11.4 для вектора состояния системы и определяет модель вспомогательной переменной  $\mathbf{z}$ , порядок которой равен  $(n - m) \times 1$  и соотношение для  $\hat{\mathbf{x}}$ .

Матрица  $\mathbf{G}$  в наблюдателе свободна в выборе и подбирается так, чтобы обеспечить качество динамического процесса восстановления координат состояния.

Наблюдатели неполного порядка Люинбергера оказываются менее чувствительными к помехам, нежели наблюдатели полного порядка.

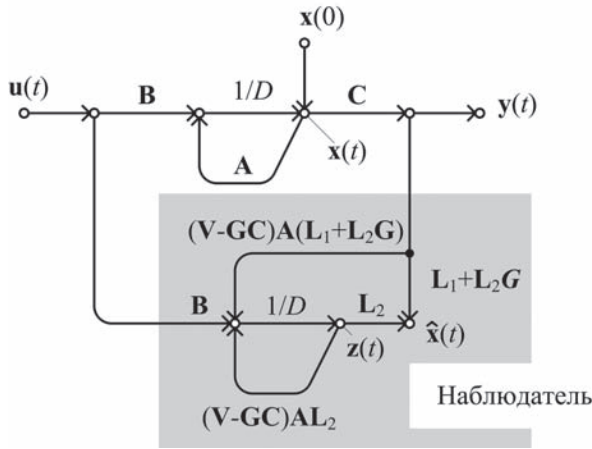


Рис. 11.4

Структура системы и наблюдателя Люинбергера

#### 11.4. СИНТЕЗ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ С НАБЛЮДАТЕЛЕМ СОСТОЯНИЯ

Структура регулятора замкнутой системы управления, у которой не все координаты состояния измеряются, содержит наблюдатель, в котором восстанавливаются недостающие координаты вектора состояния, и устройство формирования закона управления — регулятор, в котором управление формируется в виде линейной формы от восстановленного вектора состояния системы. Модель такой замкнутой системы представляется в виде объединения двух моделей: разомкнутой системы и наблюдателя с формирователем управления

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}^0, \\
 \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t); \\
 \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \hat{\mathbf{x}}(0) &= \mathbf{0}, \\
 \mathbf{u}(t) &= -\mathbf{K}\mathbf{x}(t).
 \end{aligned} \tag{11.31}$$

Изучим свойства такой системы, для чего упростим ее модель, исключив из ее описания управление  $\mathbf{u}(t)$  и выход  $\mathbf{y}(t)$ , как внутренние переменные:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t); & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}^0, \\
 \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}}(t); & \hat{\mathbf{x}}(0) &= \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{11.32}$$

Порядок такой замкнутой системы равен  $2n$ , вектор состояния состоит из пары векторов  $(\mathbf{x}(t) \ \hat{\mathbf{x}}(t))^T$ , а матрица состояния имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{G}\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K} \end{pmatrix}. \tag{11.33}$$

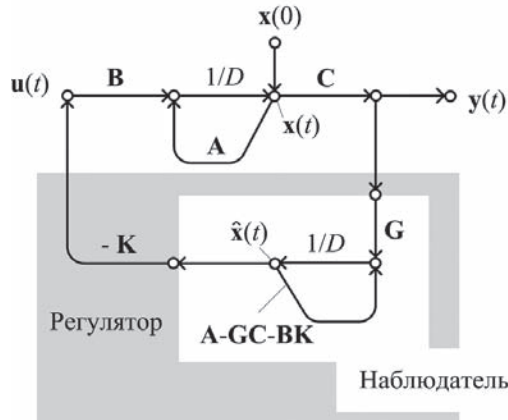


Рис. 11.5  
Структура замкнутой системы с наблюдателем и регулятором

Ошибку восстановления вектора состояния системы  $\delta(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$  описывает однородное дифференциальное уравнение

$$\dot{\delta}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\delta(t), \quad \delta(0) = \mathbf{x}(0), \quad (11.34)$$

которое можно сделать асимптотически устойчивым, соответствующим подбором матрицы  $\mathbf{G}$ .

Рассмотрим в качестве нового вектора состояния системы пару  $(\mathbf{x}(t), \delta(t))$ , тогда модель системы в новых координатах принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{BK}\delta(t), & \mathbf{x}(0); \\ \dot{\delta}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\delta(t), & \delta(0) = \mathbf{x}(0). \end{aligned} \quad (11.35)$$

Матрица состояния такой системы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{GC} \end{pmatrix}, \quad (11.36)$$

поэтому характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{BK})\det(\mathbf{A} - \mathbf{GC}) = 0. \quad (11.37)$$

Значит, спектр характеристических чисел замкнутой вполне управляемой и вполне наблюдаемой системы есть множественное объединение полюсов регулятора и полюсов наблюдателя. Причем первые могут быть произвольно расположены на комплексной плоскости путем соответствующего подбора матрицы  $\mathbf{K}$ , а вторые также произвольно могут быть расположены на комплексной плоскости путем соответствующего подбора матрицы  $\mathbf{G}$ .

Итак, асимптотически устойчивые регулятор и наблюдатель обеспечивают асимптотическую устойчивость замкнутой системы управления. На рис. 11.5 показана структура замкнутой системы с наблюдателем и регулятором.

**Примеры:**

1. Пусть в системе управления положением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,8 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0)$$

измеряется лишь переменная  $y(t) = x_1(t)$ . Построить асимптотический наблюдатель второго порядка, восстанавливающий оценки координат  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ .

Матрица  $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ , тогда матрица состояния асимптотического наблюдателя полного порядка принимает вид

$$\mathbf{A} - \mathbf{GC} = \begin{pmatrix} -g_1 & 1 \\ -g_2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Полюсы наблюдателя определяют уравнение

$$\det(\lambda \mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{GC})) = \lambda^2 + (5 + g_1)\lambda + (5g_1 + g_2) = 0.$$

Переходные процессы в наблюдателе будут несравнимы с процессами в системе, если полюсы наблюдателя будут значительно левее полюсов системы. Поскольку характеристические числа системы действительные и равные 0, -5, то расположим полюсы наблюдателя в точках  $-20 \pm j10$ .

Желаемый характеристический полином наблюдателя принимает вид

$$\lambda^2 + 40\lambda + 500,$$

что будет иметь место тогда, когда  $g_1 = 35$ ,  $g_2 = 325$ .

Модель асимптотического наблюдателя системы принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1(t) &= -35(\hat{x}_1(t) - y(t)) + \hat{x}_2(t), \\ \dot{\hat{x}}_2(t) &= -325(\hat{x}_1(t) - y(t)) - 5\hat{x}_2(t) + 0,8u(t), \quad \hat{x}_1(0) = \hat{x}_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Структура системы со своим асимптотическим наблюдателем полного порядка представлена на рис. 11.6.

2. В условиях предыдущего примера синтезировать структуру асимптотического наблюдателя Люинбергера первого порядка.

Выберем матрицу  $\mathbf{V}$  так, чтобы матрица  $\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}$  оказалась единичной, тогда матрицы  $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$  примут вид

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\mathbf{G} = g$  при этом оказывается скалярной, поэтому

$$(\mathbf{V} - \mathbf{GC}) = \begin{pmatrix} -g & 1 \end{pmatrix}.$$

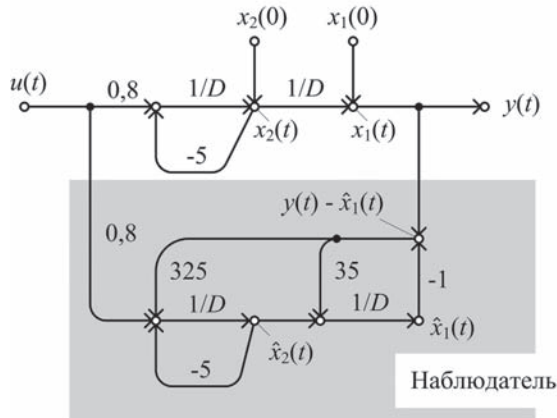


Рис. 11.6  
Структура автоматической системы с асимптотическим наблюдателем полного порядка

Дифференциальное уравнение для вспомогательной переменной  $z$  и соотношение для оценки координат вектора состояния принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -(g + 5)z - (g^2 + 5g)y + 0,8u, \quad z(0) = 0; \\ \hat{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ g \end{pmatrix} y. \end{aligned}$$

Значение  $g$  выберем из условия: полюс наблюдателя должен быть значительно левее полюсов системы. Полюсы системы лежат на действительной оси в точках  $0, -5$ , единственный полюс наблюдателя  $-(g + 5)$  расположим на действительной оси в точке  $-20$ , но тогда  $g = 15$ .

Окончательно структура синтезированного наблюдателя Льюинбергера описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \hat{x}_2(t) &= z(t) + 15y(t); \\ \dot{z}(t) &= -20z(t) - 300y(t) + 0,8u(t); \quad z(0) = 0. \end{aligned}$$

На рис. 11.7 приведена структура этого наблюдателя.

**3.** Выполнить синтез замкнутой системы стабилизации, разомкнутая часть которой описывает уравнение

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -5x_2(t) + 0,6u(t) \end{aligned}$$

и может быть измерена лишь координата  $x_1(t)$ .

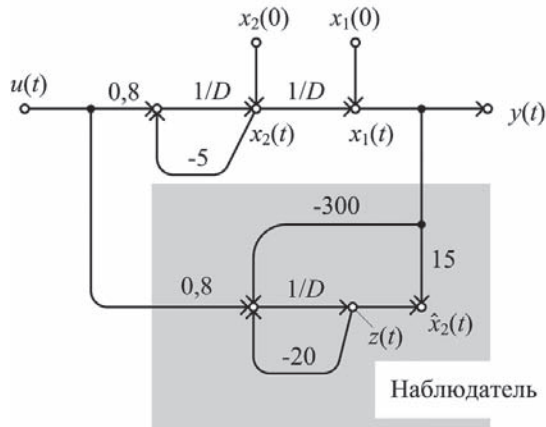


Рис. 11.7

Структура автоматической системы с асимптотическим наблюдателем неполного порядка

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$\det(\lambda \mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = \lambda^2 + (5 + 0,6k_2)\lambda + 0,6k_1 = 0,$$

потому что

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = (k_1 \quad k_2).$$

Собственные числа объекта управления — два действительных числа  $0, -5$ , потребуем, чтобы полюсы регулятора были комплексными и расположены в точках  $-15 \pm j8$ .

Желаемый характеристический полином будет иметь вид

$$\lambda^2 + 30\lambda + 289,$$

что возможно, когда  $k_1 = 481,7 \quad k_2 = 41,7$ .

Характеристическое уравнение наблюдателя полного порядка имеет вид

$$\det(\lambda \mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{GC})) = \lambda^2 + (5 + g_1)\lambda + (5g_1 + g_2) = 0,$$

потому что

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \quad 0).$$

Потребуем, чтобы полюсы наблюдателя были расположены еще левее, чем у регулятора в точках  $-45 \pm j25$ , а значит желаемый характеристический полином наблюдателя будет иметь вид

$$\lambda^2 + 90\lambda + 2650,$$

что возможно, когда  $g_1 = 85, \quad g_2 = 2225$ .

Структура синтезированной системы изображена на рис. 11.8.



4. Осуществить синтез наблюдателя Льюинбергера для объекта, внутренняя модель которого задана матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (2 \ 0 \ 1).$$

Пополним матрицу  $\mathbf{C}$  матрицей  $\mathbf{V}$  до невырожденной вида  $\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}$ .

Например, положим  $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Искомая обратная матрица

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$  и вспомогательная переменная  $\mathbf{z}$  имеют размер  $2 \times 1$ .

Для определения элементов матрицы  $\mathbf{G}$  следует задать желаемые полюсы наблюдателя, составить его характеристический полином и выполнить условие синтеза.

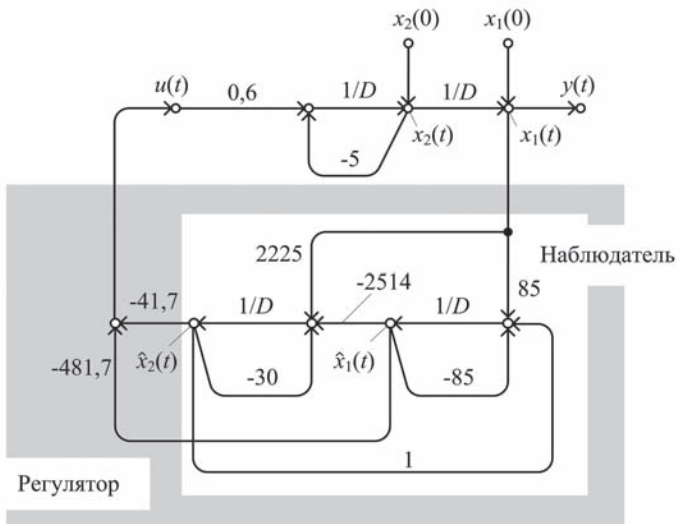


Рис. 11.8

Структура автоматической системы с асимптотическим наблюдателем и регулятором

Поскольку собственные числа системы  $\{0, -2 \pm j\}$ , то пусть полюсы наблюдателя будут, например,  $10 \pm j10$ . Желаемый характеристический полином наблюдателя

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 + 20\lambda + 200.$$

Характеристический полином наблюдателя, определяемый матрицей состояния вспомогательной переменной  $(\mathbf{V} - \mathbf{GC})\mathbf{AL}_2$  имеет вид

$$\varphi(\lambda; g_1, g_2) = \lambda^2 + (-3g_1 + 4g_2 + 3)\lambda + (-2,5g_1 + 7,5g_2 + 2,5).$$

Условие синтеза наблюдателя позволяет составить два уравнения относительно двух неизвестных элементов матрицы  $\mathbf{G}$ :

$$\begin{aligned} -3g_1 + 4g_2 + 3 &= 20, \\ -2,5g_1 + 7,5g_2 + 2,5 &= 200. \end{aligned}$$

Откуда находим, что  $g_1 = 53$ ,  $g_2 = 44$ .

Для определения структуры наблюдателя Люинбергера составим дифференциальное уравнение относительно вспомогательной переменной

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = (\mathbf{V} - \mathbf{GC})(\mathbf{AL}_2\mathbf{z}(t) + \mathbf{A}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2\mathbf{G})\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}u(t)),$$

которое в скалярном представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= 157,5z_1(t) - 212,5z_2(t) - 949y(t) - 53u(t), \\ \dot{z}_2(t) &= 132,5z_1(t) - 177,5z_2(t) - 743y(t) - 43u(t). \end{aligned}$$

Искомый алгоритм определения оценок координат состояния находим из соотношения

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = L_2\mathbf{z}(t) + (L_1 + L_2\mathbf{G})\mathbf{y}(t),$$

которое в скалярном представлении принимает вид:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= 0,5z_1 - 0,5z_2 + 5y; \\ \hat{x}_2 &= 5z_2 + 53y; \\ \hat{x}_3 &= z_1 + z_2 - 9y. \end{aligned}$$

Поскольку  $y = 2\hat{x}_1 + \hat{x}_2$ , то следует вычислять только две из трех оценок, либо  $\{\hat{x}_1 \hat{x}_3\}$ , либо  $\{\hat{x}_2 \hat{x}_3\}$ , третью оценку находят по измеренным значениям выхода системы:

$\hat{x}_2(t) = y(t) - 2x_1(t)$  в первом случае, либо  $\hat{x}_1(t) = 0,5(y(t) - x_2(t))$  во втором случае.

**5.** Синтезировать замкнутую систему оптимальной по качеству стабилизации для объекта, внутренняя модель которого задана матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 0).$$

если критерием качества процесса стабилизации выбран показатель

$$J = 0,5 \int_0^{\infty} (y^2(t) + 10u^2(t))dt.$$

В системе следует предусмотреть наблюдатель полного порядка с действительными полюсами.

Объект управления вполне управляем и наблюдаем, поэтому проблема синтеза разрешима.

Матрица  $\tilde{\mathbf{P}}$  уравнения Риккати имеет размер  $2 \times 2$  и поэтому с учетом ее симметричности необходимо определить тройку переменных  $p_{11}, p_{12}, p_{22}$ . Алгебраическое уравнение Риккати имеет вид

$$\mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{A} - 0,1 \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} \\ \tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{22} \end{pmatrix} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{11} &= -0,1p_{11}^2 - 0,1p_{12}^2 + 1, \\ \tilde{P}_{12} &= -0,1p_{11}p_{12} - 0,1p_{12}p_{22} + p_{11} - 4p_{12}, \\ \tilde{P}_{22} &= -0,1p_{12}^2 - 0,1p_{22}^2 + 2p_{12} - 8p_{22}. \end{aligned}$$

Откуда, с учетом свойства положительной определенности матрицы  $\tilde{\mathbf{P}}$  находим, что

$$p_{11} = 3,08; \quad p_{12} = 0,71; \quad p_{22} = 0,017.$$

Если бы координаты состояния были доступны для измерения, то синтез завершается оптимальным управлением

$$u^*(t) = -0,071x_1(t) - 0,017x_2(t).$$

При этом матрица состояния замкнутой системы  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  будет иметь характеристический многочлен  $\lambda^2 + 4,017\lambda + 0,071$ , корни которого  $\{-0,018; -4\}$ .

В реальности не все координаты доступны для измерения. Осуществляем синтез полного наблюдателя, как требуется в условии, с действительными полюсами  $\{-12, -12\}$ .

Для определения двух неизвестных матрицы  $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$  располагаем двумя уравнениями. Матрица  $(\mathbf{A} - \mathbf{GC})$  состояния наблюдателя имеет характеристический многочлен

$$\varphi(\lambda; g_1, g_2) = \lambda^2 + (g_1 + 4)\lambda + (4g_1 + g_2),$$

но поскольку желаемый вид этого многочлена

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 + 24\lambda + 144,$$

то  $g_1 = 20, \quad g_2 = 64$ .

Наблюдатель определяется динамической системой:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1(t) &= -20\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t) + 2y(t); \\ \dot{\hat{x}}_2(t) &= -64\hat{x}_1(t) - 4\hat{x}_2(t) + 64y(t) + u(t).\end{aligned}$$

Замкнем систему управлением

$$u(t) = -0,071\hat{x}_1 - 0,017\hat{x}_2.$$

Замкнутая система управления имеет порядок равный четырем, ее координаты состояния  $(x_1, x_2, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$ . Спектр ее собственных чисел  $\{-0,018; -4, -12, -12\}$ . Замкнутая система асимптотически устойчивая.

### 11.5. УПРАЖНЕНИЯ

1. Для объекта управления

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ -0,2 & -0,25 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -0,5 & 0,8 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t)$$

найти структуру линейного регулятора, с которым замкнутая система управления имела бы полюсы, расположенные в точках  $-0,4 \pm j0,75$ .

2. Для линейной системы второго порядка с действительными собственными числами выполнить аналитический синтез управления так, чтобы после замыкания эта система генерировала гармонические колебания фиксированной частоты.

3. Объект управления описывает линейная модель, которая задана матрицами:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{E}.$$

Выполнить синтез замкнутой системы так, чтобы после замыкания передаточная функция системы имела вид

$$H(s) = \frac{2(s+2)}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4}.$$

4. Осуществить для системы  $\Sigma^{(2)}$  :  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  синтез линейного регулятора оптимального в смысле критерия

$$J = 0,5 \int_0^T (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{R}_1 \mathbf{x}(t) + r_2 u^2) dt,$$

если  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $r_2 = 0,4$ .

Рассмотреть дополнительно два случая, когда  $r_2 = 1$  и  $r_2 = 10$ .

5. Определить структуру асимптотического наблюдателя полного порядка для системы заданной:

- матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

- передаточной функцией

$$W(s) = \frac{3}{s(s^2 + 5s + 4)}.$$

6. Осуществить синтез наблюдателя Льюинбергера для системы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (2 \ 0 \ 1).$$

7. Объект управления описывает уравнение первого порядка

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t), \quad \text{где } a, b \text{ — параметры.}$$

Необходимо синтезировать систему стабилизации этого объекта в положении покоя, оценивая процесс управления по критерию, минимизация которого должна сделать процесс стабилизации близким к нулю с малыми энергетическими затратами, для чего можно использовать критерий

$$J = 05 \int_0^T (r_1 y^2(t) + r_2 u^2(t)) dt + r_3 y^2(T), \quad r_1 = 1, r_2 > 0, r_3 > 0.$$

Убедится в том, что управление стабилизации имеет вид

$$u^*(t) = -\frac{b}{r_2} P(t) y(t),$$

где  $P(t)$  удовлетворяет уравнению Риккати:

$$\dot{P}(t) = -2aP(t) + \frac{b}{r_2} P^2(t) - 1, \quad P(T) = r_3.$$

8. Пусть в условиях упражнения 7 время стабилизации неограничено, выполнить синтез оптимального регулятора, стабилизирующего состояние объекта в положении покоя.

Определить, где расположены полюсы замкнутой системы стабилизации, дать суждение об устойчивости системы в зависимости от параметров  $r_2, r_3$ .

9. Для объекта, который задан матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 0)$$

определить структуру регулятора, оптимального в смысле критерия

$$J = 0,5 \int_0^T (y^2(t) + r_2 u^2(t)) dt, \quad T \rightarrow \infty, \quad r_2 > 0.$$

Построить наблюдатель полного попятка и использовать оценку вектора состояния для синтеза регулятора.

Исследовать реакцию замкнутой системы на начальные условия и изменение параметра в критерии качества.

**10.** Объект системы управления имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{10}{s(s^2 + 5s + 6)},$$

выполнить аналитически замыкание системы так, чтобы после замыкания система имела передаточную функцию, равную

$$H(s) = \frac{40}{(s + 2)(s + 5)(s + 9)}.$$

Осуществить синтез замкнутой системы с использованием оценок наблюдателя.

Определить моделированием реакцию замкнутой системы на начальное отклонение системы от ее положения равновесия. Проверить условия асимптотической устойчивости замкнутой системы.

## СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

- Синтез цифрового регулятора
- Аналитический синтез цифровой системы управления
- Цифровые наблюдатели состояния
- Упражнения

### 12.1. СИНТЕЗ ЦИФРОВОГО РЕГУЛЯТОРА

Структура цифровой системы управления может включать аналоговый или цифровой регулятор в прямой цепи или цепи обратной связи. На рис. 12.1, *a* приведена замкнутая цифровая система с последовательно включенным аналоговым регулятором, перед которым расположен фиксатор нулевого порядка и импульсный прерыватель.

Целью синтеза является определение передаточной функции  $W_p(s)$  непрерывного регулятора, с которым замкнутая цифровая система будет обладать заданными показателями качества переходных процессов.

Для решения задачи синтеза системы с аналоговым регулятором можно использовать два альтернативных подхода: по первому выполняются аналоговую аппроксимацию цифровой части системы, а затем для полностью непрерывной системы решают задачу синтеза известными методами, которые разработаны для непрерывных систем управления. По второму подходу предполагается получение дискретной модели аналоговой части и затем для полностью цифровой системы используют специальные дискретные методы синтеза.

Аналоговая аппроксимация цифровой части системы — импульсного прерывателя и фиксатора нулевого порядка, которые выполняют функцию *выборки-хранения*, представляется при достаточно малом периоде квантования звеном чистого запаздывания на половину периода квантования. Передаточная функция прямого тракта эквивалентной непрерывной системы принимает вид

$$W(s) = W_p(s)W_o(s)e^{-0,5sh}. \quad (12.1)$$

Дискретная аппроксимация непрерывной части системы может быть выполнена с использованием  $Z$ -преобразования или прямого алгебраического метода дискретизации.

В первом случае, соответствующая  $W(s)$  импульсная передаточная функция  $W(z)$  может быть найдена по таблицам соответствия или, путем последовательного перехода от  $W(s)$  к внутренней непрерывной модели и последующей аналитической дискретизации этой модели.

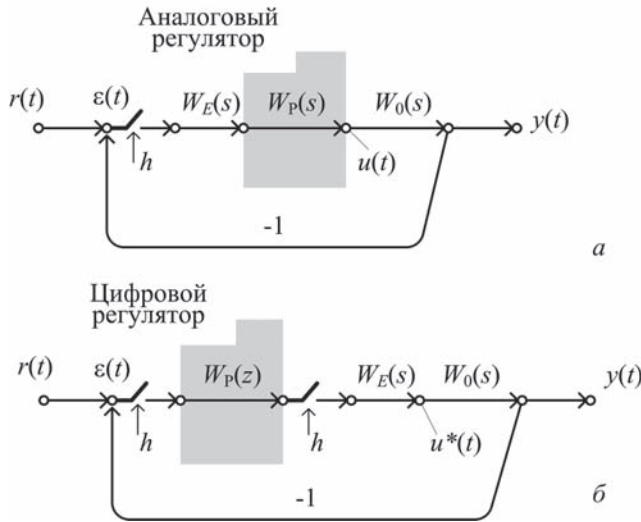


Рис. 12.1

Замкнутая цифровая система с аналоговым регулятором (а) и цифровым регулятором (б).

Алгебраические методы дискретизации непрерывной части системы используют конечно-разностные алгоритмы аппроксимации.

Переменные преобразования Лапласа и  $Z$ -преобразования связаны соотношением  $z = e^{sh}$ , поэтому различные аппроксимации экспоненты в окрестности нуля порождают различные конечно-разностные алгоритмы дискретизации непрерывной модели.

Так, например:

- разложение экспоненты в степенной ряд  $e^{sh} \simeq 1 + sh$  порождает алгоритм Эйлера, или алгоритм прямой разности,

$$s \simeq \frac{z-1}{h}; \quad (12.2)$$

- представление  $e^{sh} \simeq \frac{1}{1-sh}$  порождает алгоритм обратной разности

$$s \simeq \frac{z-1}{zh}; \quad (12.3)$$

- представление  $e^{sh} \simeq \frac{1+0,5sh}{1-0,5sh}$  порождает алгоритм Тустена

$$s \simeq \frac{z-1}{2h(z+1)}. \quad (12.4)$$



Для дискретизации непрерывной модели достаточно заменить переменную  $s$  в выражении передаточной функции  $W(s)$  на правую часть алгоритма, чтобы получить выражение импульсной передаточной функции  $W(z)$ .

Заметим, что алгоритм дискретизации Тустена осуществляет конформное отображение комплексной левой  $s$ -полуплоскости в единичный круг комплексной  $z$ -плоскости. Другие алгоритмы этим свойством не обладают. Алгоритм Эйлера, например, отображает левую  $s$ -полуплоскость в полуплоскость  $\operatorname{Re} z < 1$ , поэтому модель устойчивой непрерывной системы при такой аппроксимации может не сохранить этого свойства в дискретизированном представлении.

На рис. 12.1, б представлена система, которая имеет в прямой цепи цифровой регулятор, импульсные прерыватели и фиксатор.

Функцию цифрового регулятора можно реализовать, используя, например, микропроцессорный контроллер, что позволяет добиваться лучшего по сравнению с аналоговыми регуляторами качества переходных процессов в системе.

При синтезе дискретных систем чаще всего используются универсальные цифровые ПИД-регуляторы, реализующие одновременно пропорциональный, интегральный и дифференциальный законы регулирования.

В непрерывной интерпретации ПИД-регулятор описывает передаточная функция

$$W_p(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right), \quad (12.5)$$

где  $k_p$ ,  $T_I$ ,  $T_D$  — пропорциональное усиление, постоянная интегрирования и дифференцирования соответственно.

Дискретное представление ПИД-регулятора можно получить, используя разностные алгоритмы. Часто интегральную составляющую аппроксимируют по алгоритму Эйлера, а дифференциальную — по алгоритму обратной разности. В этом случае импульсная передаточная функция регулятора принимает вид

$$W_p(z) = k_p \left( 1 + \frac{h}{T_I(z-1)} + T_D \frac{z-1}{hz} \right). \quad (12.6)$$

Выполнив аппроксимацию интегральной составляющей по алгоритму Тустена, а дифференциальную по Эйлера, получим выражение для выходного сигнала регулятора

$$u(k) = k_p \left( \varepsilon(k) + \frac{h}{T_I} \left( \frac{\varepsilon(0) + \varepsilon(k)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon(i) \right) + \frac{T_D}{h} (\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)) \right).$$

Очевидный недостаток этой формулы состоит в том, что она не рекуррентна, для ее вычисления необходимо помнить на момент  $k$  все предшествующие значения входного сигнала  $\varepsilon(i)$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ . Придать этой формуле рекуррентный вид можно, вычисляя изменение управляющего сигнала  $u(k) - u(k-1)$ , в котором

$$u(k-1) = k_p \left( \varepsilon(k-1) + \frac{h}{T_I} \left( \frac{\varepsilon(0) + \varepsilon(k-1)}{2} + \sum_{i=1}^{k-2} \varepsilon(i) \right) + \frac{T_D}{h} (\varepsilon(k-1) - \varepsilon(k-2)) \right).$$

Получим

$$u(k) - u(k-1) = k_p \left( \varepsilon(k) - 2\varepsilon(k-1) + \frac{h}{2T_I} (\varepsilon(k) + \varepsilon(k-1)) + \frac{T_D}{h} (\varepsilon(k) - 2\varepsilon(k-1) + \varepsilon(k-2)) \right),$$

откуда находим искомую рекуррентную форму представления выходного сигнала ПИД-регулятора

$$u(k) = u(k-1) + b_1 \varepsilon(k) + b_2 \varepsilon(k-1) + b_3 \varepsilon(k-2), \quad (12.7)$$

в котором

$$\begin{aligned} b_1 &= k_p \left( 1 + \frac{h}{2T_I} + \frac{T_D}{h} \right), \\ b_2 &= -k_p \left( 1 - \frac{h}{2T_I} + 2\frac{T_D}{h} \right), \\ b_3 &= -k_p \frac{T_D}{h}. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Синтез системы с цифровым ПИД-регулятором сводится к определению параметров  $k_p$ ,  $T_I$ ,  $T_D$  регулятора или коэффициентов  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  алгоритма вычисления управляющего ПИД-сигнала, которые обеспечивают заданные показатели качества системы.

**Пример.** Непрерывная часть проектируемой цифровой системы, схема которой приведена на рис. 12.1, б, имеет передаточную функцию

$$W_0(s) = \frac{5}{(s+1)(0,5s+1)}.$$

Импульсные прерыватели работают синхронно с периодом квантования  $h = 0,1$  с. Синтезировать замкнутую цифровую систему для обработки линейно растущего сигнала так, чтобы коэффициент ошибки по скорости была не более 5 единиц.

В разомкнутом состоянии система без коррекции имеет импульсную передаточную функцию

$$W_E(z)W_0(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{W_0(s)}{s} \right] \right] = 0,045 \frac{z+0,90}{(z-0,90)(z-0,82)},$$

поэтому после замыкания этой системы ее характеристический многочлен примет вид

$$\lambda^2 - 1,68\lambda + 0,78.$$

Корни этого многочлена  $\lambda_{1,2} = 0,84 \pm j0,28$  лежат внутри единичного круга, поэтому система будет асимптотически устойчивой. Однако установившаяся ошибка обработки единичного задания не равна нулю.

Действительно,

$$e^* = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} (1 - H(z)) \mathcal{Z}[1(t)] = 1 - H(1) = 0,16.$$

В этом выражении

$$H(z) = 0,045 \frac{z + 0,90}{z^2 - 1,68z + 0,78},$$

поэтому в системе необходима коррекция, которую можно выполнить, используя ПИ- или ПИД-регулятор. Рассмотрим случай использования ПИД-регулятора с передаточной функцией

$$W_p(z) = k_p + k_I \frac{z+1}{z-1} + k_D \frac{z-1}{z},$$

в котором

$$k_I = 0,05 \frac{k_p}{T_I}, \quad k_D = 10k_p T_D.$$

Передаточная функция разомкнутой системы с ПИД-регулятором будет иметь вид

$$W(z) = 0,045(z + 0,9) \frac{(k_p + k_I + k_D)z^2 + (k_I - k_p - 2k_D)z + k_D}{z(z-1)(z-0,9)(z-0,82)},$$

но тогда передаточная функция замкнутой системы по ошибке оказывается равной

$$H_e(z) = \frac{1}{1 + W(z)} = \frac{z^4 - 2,72z^3 + 2,458z^2 - 0,738z}{z^4 + 0,045K_1z^3 + 0,0405K_2z^2 + K_3z + k_D}.$$

В этом выражении обозначены

$$\begin{aligned} K_1 &= k_p + k_I + k_D - 2,72; \\ K_2 &= k_p + k_I + k_D + 2,458; \\ K_3 &= k_I - k_p - 2k_D - 0,738. \end{aligned}$$

Выражения для  $H_e$  позволяют определить коэффициенты ошибки: в частности, ошибки по положению и скорости

$$\begin{aligned} c_0 &= H_e(1) = 0; \\ c_1 &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} W(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0,45(z + 0,9)(k_p + k_I + k_D)z^2 + (k_I - k_p - 2k_D)z + k_D}{z(z-0,9)(z-0,82)} = 95,6k_I. \end{aligned}$$

Располагая значением допустимой ошибки по скорости, находим параметр  $k_I = 0,052$  ПИД-регулятора. Два других параметра можно определить из условия компенсации двух полюсов передаточной функции объекта управления двумя нулями передаточной функции регулятора:

$$z^2 + \frac{(k_I - k_p - 2k_D)}{k_p + k_I + k_D}z + \frac{k_D}{k_p + k_I + k_D} = (z - 0,9)(z - 0,82),$$

что возможно, когда

$$\frac{k_I - k_p - 2k_D}{k_p + k_I + k_D} = -1,72;$$

$$\frac{k_D}{k_p + k_I + k_D} = 0,738.$$

Откуда получим значения параметров ПИД-регулятора:

$$k_p = -0,848k_I; \quad k_D = 0,427k_I.$$

После настройки ПИД-регулятора по найденным параметрам передаточная функция разомкнутой системы принимает вид

$$W(z) = 0,045 \frac{z + 0,9}{z(z - 1)}.$$

Характеристическое уравнение синтезированной замкнутой цифровой системы

$$\lambda^2 - 0,74\lambda + 0,23 = 0$$

имеет корни  $\{0,43; -0,85\}$ , что обеспечивает асимптотическую устойчивость системы и заданное качество переходного процесса.

## 12.2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим линейную вполне управляемую систему с одним входом, в которой доступен для измерения весь вектор состояния:

$$\Sigma^{(n)} (\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C}): \quad \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0); h,$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{E}\mathbf{x}(k).$$

Задача аналитического синтеза состоит в том, чтобы определить структуру и параметры регулятора системы, который позволит переводить состояние системы из произвольного начального  $\mathbf{x}(0)$  в начало координат с заданным качеством переходных процессов. Последнее означает, что после замыкания система должна обладать заданным спектром собственных чисел.

Для решения задачи синтеза используют линейную обратную связь по состоянию системы

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{S}\mathbf{x}(k). \quad (12.9)$$

После замыкания модель движения системы принимает вид

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{M} - \mathbf{NS})\mathbf{x}(k). \quad (12.10)$$

Характеристический многочлен такой системы

$$\varphi(\lambda; S) = \det(\lambda\mathbf{E} - (\mathbf{M} - \mathbf{NS})). \quad (12.11)$$

Заданное расположение полюсов замкнутой системы определяет желаемый характеристический многочлен  $\varphi^*(\lambda)$ , поэтому для выполнения основного условия синтеза необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\varphi(\lambda; \mathbf{S}) = \varphi^*(\lambda). \quad (12.12)$$

Это равенство двух многочленов позволяет найти для вполне управляемой системы неизвестные элементы матрицы обратных связей  $S$  путем решения соответствующих уравнений или, в общем случае, используя формулу Акермана

$$\mathbf{S} = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1) \mathbf{R}^{-1} \varphi^*(\mathbf{M}), \quad (12.13)$$

где

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{MN} & \mathbf{M}^2\mathbf{N} & \dots & \mathbf{M}^{n-1}\mathbf{N} \end{pmatrix}$$

оказывается квадратной  $n \times n$  матрицей управляемости разомкнутой системы, а матричный характеристический многочлен замкнутой системы

$$\varphi^*(\mathbf{M}) = \varphi^*(\lambda) \Big|_{\lambda=\mathbf{M}}. \quad (12.14)$$

Возможность свободного размещения полюсов замкнутой системы используем для одного частного случая. Если все полюсы замкнутой системы расположить в начале координат, тогда желаемый характеристический многочлен системы, очевидно, примет вид

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n. \quad (12.15)$$

Согласно теореме Гамильтона–Кэли (см. А.1), *всякая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению*, поэтому применительно к матрице  $(\mathbf{M} - \mathbf{NS})$  синтезированной системы управления это утверждение представляется в виде

$$\varphi(\mathbf{M} - \mathbf{NS}) = \varphi^*(\mathbf{M} - \mathbf{NS}) = (\mathbf{M} - \mathbf{NS})^n = 0. \quad (12.16)$$

Но этот факт означает, что независимо от начального состояния система к моменту  $nh$  окажется в нулевом состоянии.

В самом деле, в замкнутой системе текущее состояние определяется выражением

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{M} - \mathbf{N}\mathbf{S})\mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(0), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (12.17)$$

значит на  $n$ -м шаге состояние системы оказывается равным

$$\mathbf{x}(n) = (\mathbf{M} - \mathbf{N}\mathbf{S})^n \mathbf{x}(0) = 0. \quad (12.18)$$

Системы, обладающие таким свойством, называют системами *с аperiodической реакцией*, или системами *с конечной длительностью переходного процесса*.

Любая ошибка в такой системе может быть устранена не более чем за  $n$  шагов!

Заметим, что существование систем с конечной длительностью переходного процесса — характерная особенность дискретных систем, такого нет в линейных непрерывных системах.

### Примеры:

1. Управляемый объект описывает модель

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u(k).$$

Найти управляющую последовательность для перевода этого объекта из начального состояния  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  в конечное  $\mathbf{x}(2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  за два шага.

Состояние системы на втором шаге определяет выражение

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{M}^2 \mathbf{x}(0) + \mathbf{M}\mathbf{N}u(0) + \mathbf{N}u(1).$$

Неизвестные элементы управляющей последовательности  $\{u(0), u(1)\}$  удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{x}(2) - \mathbf{M}^2 \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{M}\mathbf{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}.$$

Матрица матрица управляемости объекта управления

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{M}\mathbf{N} \end{pmatrix}$$

невырожденная, ее ранг равен двум, следовательно, объект вполне управляем, что позволит однозначно выполнить перевод системы в нужное состояние.

Находим

$$\begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{M}\mathbf{N} \end{pmatrix}^{-1} (\mathbf{x}(2) - \mathbf{M}^2 \mathbf{x}(0)).$$

Определяем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{M}\mathbf{N} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,857 & -0,143 \\ 0,143 & 0,143 \end{pmatrix},$$

а затем

$$\mathbf{x}(2) - \mathbf{M}^2 \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 16 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Искомая управляющая последовательность состоит из двух последовательных воздействий:  $u(0) = 6,29$ ;  $u(1) = 9,71$ .

**2.** Осуществить линейный синтез замкнутой дискретной системы с заданным характеристическим многочленом

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 + 0,1\lambda - 0,06.$$

Неизменяемая часть системы задается матрицами

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0,08 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,04 \end{pmatrix}.$$

Выполнить с  $h = 0,5$  с четыре шага движения синтезированной системы из состояния  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  в состояние покоя.

Движение замкнутой системы определяет однородное уравнение с матрицей  $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} - \mathbf{NS}$

$$\mathbf{x}(k+1) = \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} -1,57 & 13,07 \\ -0,17 & 1,47 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h = 0,5.$$

Траектория движения из начального состояния в состояние покоя проходит через состояния:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \tilde{\mathbf{M}}^k \mathbf{x}(0) : \\ \mathbf{x}(1) &= \begin{pmatrix} -1,57 \\ -0,17 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}(2) = \begin{pmatrix} 0,24 \\ 0,02 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{x}(3) &= \begin{pmatrix} -0,16 \\ -0,016 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}(4) = \begin{pmatrix} 0,037 \\ 0,003 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**3.** Объект управления задается дискретной моделью в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0,00413 \\ 0 & 0,524 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,712 \end{pmatrix} u(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad h; \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{x}(k). \end{aligned}$$

Выполним синтез замкнутой системы управления с линейным регулятором для перевода системы из произвольного начального состояния  $\mathbf{x}^0$  в положение покоя так, чтобы полюсы замкнутой системы располагались в точках  $\{0,5 \pm j0,85\}$ .

Задача синтеза разрешима, поскольку объект управления с заданными матрицами  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  вполне управляем:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{MN} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 0,005 & 0,00794 \\ 0,712 & 0,373 \end{pmatrix} = 2.$$

Замкнем систему с матрицей  $\mathbf{S} = (s_1 \ s_2)$ , движение замкнутой системы будет описывать модель

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{M} - \mathbf{NS})\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} 1 - 0,005s_1 & 0,00413 - 0,005s_2 \\ -0,712s_1 & 0,524 - 0,712s_2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}^0.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы принимает вид

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{E} - (\mathbf{M} - \mathbf{N}\mathbf{S})) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 + 0,005s_1 & -0,00413 + 0,005s_2 \\ 0,712s_1 & -0,524 + 0,712s_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Или в раскрытом виде

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + (0,05s_1 + 0,712s_2 - 1,524)\lambda + (0,00032s_1 - 0,712s_2 + 0,524).$$

Желаемое характеристическое уравнение замкнутой системы, согласно условию задачи синтеза, должно иметь вид

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 0,973,$$

что возможно, когда

$$\begin{aligned}0,05s_1 + 0,712s_2 - 1,524 &= -1; \\ 0,00032s_1 - 0,712s_2 + 0,524 &= 0,973.\end{aligned}$$

Эти соотношения разрешимы:  $s_1 = 182,9$ ;  $s_2 = -0,548$ .

Искомое управление

$$u(k) = 182,9x_1(k) - 0,548x_2(k)$$

полностью определяет структуру регулятора.

Движение синтезированной замкнутой системы описывается моделью

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 0,086 & -27,41 \\ -130,21 & 0,914 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad h.$$

4. Дискретное представление непрерывного объекта с передаточной функцией  $\frac{1}{s^2}$  и шагом дискретизации  $h = 0,1$  с задано матрицами

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,1 \end{pmatrix}.$$

Выполнить синтез замкнутой дискретной системы управления так, чтобы после замыкания характеристический многочлен системы был равен

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2$$

с известными параметрами  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ .

Найдем характеристический многочлен замкнутой системы с линейным регулятором

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{S}\mathbf{x}(k); \quad \mathbf{S} = (s_1 \quad s_2).$$



Матрица

$$(\mathbf{M} - \mathbf{NS}) = \begin{pmatrix} 1 - 0,005s_1 & 0,1 - 0,005s_2 \\ -0,1s_1 & 1 - 0,1s_2 \end{pmatrix},$$

поэтому характеристический многочлен замкнутой системы принимает вид

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + (0,1s_2 + 0,005s_1 - 2)\lambda + (1 - 0,1s_2 + 0,005s_1).$$

Условие синтеза  $\varphi^*(\lambda; \mathbf{S}) = \varphi(\lambda)$  может быть выполнено если:

$$\begin{aligned} 0,1s_2 + 0,005s_1 - 2 &= \alpha_1; \\ 1 - 0,1s_2 + 0,005s_1 &= \alpha_2. \end{aligned}$$

Откуда находим искомые коэффициенты обратных связей:

$$\begin{aligned} s_1 &= 100(1 + \alpha_1 + \alpha_2); \\ s_2 &= 5(3 + \alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned}$$

Этот же результат получим с использованием формулы Акермана. Матрица управляемости разомкнутой системы имеет вид

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}; \mathbf{MN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,005 & 0,015 \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\mathbf{R}^{-1} = 100 \begin{pmatrix} -1 & 0,15 \\ 1 & -0,05 \end{pmatrix}.$$

Матричный характеристический многочлен системы равен

$$\varphi(\mathbf{M}) = \mathbf{M}^2 + \alpha_1\mathbf{M} + \alpha_2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 + \alpha_2 & 0,2 + 0,1\alpha_1 \\ 0 & 1 + \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix},$$

поэтому искомая матрица обратных связей принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= (0 \ 1) \mathbf{R}^{-1} \varphi(\mathbf{M}) = (100 \ -5) \varphi(\mathbf{M}) = \\ &= (100(1 + \alpha_1 + \alpha_2) \ 5(3 + \alpha_1 - \alpha_2)). \end{aligned}$$

В результате получили управление

$$u(k) = -100(1 + \alpha_1 + \alpha_2)x_1 - 5(3 + \alpha_1 - \alpha_2)x_2,$$

что совпадает с полученным ранее результатом.

**5.** Выполнить синтез системы управления с объектом второго порядка из примера 2 так, чтобы после замыкания линейной обратной связью

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{S}\mathbf{x}(k)$$

система имела бы полюсы в нуле.

Для решения этой задачи необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\varphi(\lambda; \mathbf{S}) = \det(\lambda \mathbf{E} - (\mathbf{M} - \mathbf{N}\mathbf{S})) = \lambda^2.$$

Что возможно, когда

$$\mathbf{S} = (0 \ 1) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{M}^2 = (100 \ -5) \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = (100 \ 15).$$

Замкнутую систему описывает уравнение

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{M} - \mathbf{N}\mathbf{S})\mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(0), \quad k = 0, 1, \dots$$

Ее матрица состояния

$$\mathbf{M} - \mathbf{N}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,025 \\ -10 & -0,5 \end{pmatrix}.$$

Квадрат этой матрицы равен нулю.

Проследим изменение состояния системы. Управление на первом шаге равно

$$u(0) = -100x_1(0) - 15x_2(0),$$

состояние системы после первого шага управления:

$$x_1(1) = 0,5x_1(0) + 0,025x_2(0);$$

$$x_2(1) = -10x_1(0) + 0,5x_2(0).$$

На втором шаге

$$u(1) = 100x_1(0) - 10x_2(0),$$

и система переходит в состояние покоя  $x_1(2) = x_2(2) = 0$ , при любых начальных состояниях системы  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$ .

### 12.3. ЦИФРОВЫЕ НАБЛЮДАТЕЛИ СОСТОЯНИЯ

Для реализации алгоритмов синтеза необходимы данные о состоянии системы

$$\Sigma^{(n)}(\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C}): \quad \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k); \quad \mathbf{x}(0), \quad h, \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k).$$

Некоторые из состояний можно измерить, остальные следует вычислять, используя, например, процедуру асимптотического наблюдателя Люинбергера.

**Определение.** Динамическая система

$$\mathbf{x}(k+1|k) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k|k-1) + \mathbf{F}(\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\mathbf{x}(k|k-1)) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k)$$

называется **цифровым асимптотическим наблюдателем** полного порядка системы  $\Sigma^{(n)}: (\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C})$ , если для любого начального состояния  $\mathbf{x}(0)$ , и для всех

$\mathbf{u}(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  оценка  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  с ростом времени асимптотически приближается к вектору состояния  $\mathbf{x}(k)$ .

Здесь в определении переменная  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$  обозначает восстановленную оценку вектора состояния  $\mathbf{x}(k+1)$ , которая была вычислена по результатам измерений на момент  $k$ .

Подберем матрицу  $\mathbf{F}$  так, чтобы ошибка восстановления

$$\varepsilon(k|k-1) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$$

асимптотически со временем стремилась к нулю.

Динамику изменения ошибки восстановления описывает разностное однородное уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon(k+1|k) &= \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k) - (\mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \\ &+ \mathbf{F}(\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k)) = \\ &= (\mathbf{M} - \mathbf{F}\mathbf{C})\varepsilon(k|k-1), \end{aligned} \quad (12.19)$$

поэтому асимптотическая сходимость ошибки восстановления к нулю возможна в том случае, когда матрица  $(\mathbf{M} - \mathbf{F}\mathbf{C})$  асимптотически устойчива, что возможно тогда, когда система  $\Sigma^{(n)}: (\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C})$  вполне наблюдаема.

Собственные числа матрицы  $(\mathbf{M} - \mathbf{F}\mathbf{C})$  — полюсы наблюдателя могут быть выбраны любыми внутри единичного круга комплексной плоскости. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству аналогичной теоремы для непрерывных систем.

Выбор характеристического многочлена наблюдателя полностью определяет исконую матрицу  $\mathbf{F}$ .

Рассмотрим один частный случай. Разместим все полюсы наблюдателя в начале координат, тогда характеристический многочлен матрицы  $(\mathbf{M} - \mathbf{F}\mathbf{C})$  примет вид

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n. \quad (12.20)$$

Из этого следует, в силу теоремы Гамильтона–Кэли, что матрица

$$(\mathbf{M} - \mathbf{F}\mathbf{C})^n = 0. \quad (12.21)$$

Используем этот факт в уравнении ошибки восстановления

$$\varepsilon(n) = (\mathbf{M} - \mathbf{F}\mathbf{C})\varepsilon(n-1) = (\mathbf{M} - \mathbf{F}\mathbf{C})^n\varepsilon(0) = 0. \quad (12.22)$$

Синтезированный наблюдатель полного порядка обладает замечательным свойством: любая начальная ошибка  $\varepsilon(0)$  наблюдения исчезает не более чем за  $n$  шагов, иначе говоря, к  $n$ -му шагу наблюдатель полностью восстанавливает значения неизменяемых координат состояния системы. Такие наблюдатели называют **апериодическими**.

Структура наблюдателя полного порядка определяется матрицей  $\mathbf{F}$ , которая может быть найдена из условия синтеза

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - (\mathbf{M} - \mathbf{F}\mathbf{C})) = \varphi^*(\lambda; F), \quad (12.23)$$

где  $\varphi^*(\lambda)$  — желаемый характеристический многочлен, который выбирают с учетом местоположения полюсов управляемой системы так, чтобы процесс восстановления протекал гораздо быстрее, чем переходные процессы в системе.

Матрицу  $\mathbf{F}$ , удовлетворяющую условию синтеза, определяют формулой Акермана

$$\mathbf{F} = \varphi(\mathbf{M})\mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (12.24)$$

в которой

$$\mathbf{Q} = \left( \mathbf{C}^T; \mathbf{M}^T\mathbf{C}^T; \dots; (\mathbf{M}^{n-1})^T\mathbf{C}^T \right) \quad (12.25)$$

является  $n \times n$  матрицей наблюдаемости системы  $\Sigma^{(n)}: (\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C})$ , а  $\varphi^*(\mathbf{M}) = \varphi^*(\lambda) \Big|_{\lambda=\mathbf{M}}$  — матричный характеристический многочлен наблюдателя полного порядка.

Наблюдатели полного порядка обладают избыточностью, поскольку осуществляют вычислительный процесс для всех координат состояния, а значит и для тех, которые доступны для измерения. Наблюдатели не полного порядка, или *наблюдатели Люинбергера*, восстанавливают только неизмеряемые координаты состояния.

Структура наблюдателя Люинбергера имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k|k) &= \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k-1) + \\ &+ \mathbf{F}(\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}(\mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k-1))) = \\ &= (\mathbf{E} - \mathbf{F}\mathbf{C})(\mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k-1)) + \mathbf{F}\mathbf{y}(k). \end{aligned}$$

Ошибка восстановления для этого наблюдателя

$$\varepsilon(k|k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)$$

изменяется согласно уравнению

$$\begin{aligned} \varepsilon(k|k) &= \mathbf{M}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k-1) - (\mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \\ &+ \mathbf{F}(\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}(\mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k-1)))) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k-1) = \\ &= \mathbf{M}\mathbf{x}(k-1) - \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) - \mathbf{F}\mathbf{C}(\mathbf{M}\mathbf{x}(k-1) + \\ &+ \mathbf{N}\mathbf{u}(k-1)) + \mathbf{F}\mathbf{C}(\mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k-1)) = \\ &= (\mathbf{E} - \mathbf{F}\mathbf{C})\mathbf{M}\varepsilon(k-1|k-1). \end{aligned} \quad (12.26)$$

Решение этого однородного разностного уравнения будет асимптотически устойчивым, если асимптотически устойчива матрица  $(\mathbf{E} - \mathbf{F}\mathbf{C})\mathbf{M}$ , что возможно сделать подбором матрицы  $\mathbf{F}$  тогда, когда система  $\Sigma^{(n)}: (\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{C})$  вполне наблюдаема.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k|k) &= \mathbf{C}\varepsilon(k|k) = \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{E} - \mathbf{F}\mathbf{C})\mathbf{M}\varepsilon(k-1|k-1) = \\ &= (\mathbf{E} - \mathbf{C}\mathbf{F})\mathbf{C}\mathbf{M}\varepsilon(k-1|k-1). \end{aligned} \quad (12.27)$$

Пусть для определенности система имеет  $r$  измеряемых выходов, значит матрица  $\mathbf{C}$  имеет размер  $r \times n$ , но тогда  $\mathbf{F}$  имеет размер  $n \times r$  и матрица  $(\mathbf{E} - \mathbf{C}\mathbf{F})$  — квадратная размером  $r \times r$ .

Если теперь матрицу  $\mathbf{F}$  подобрать так, чтобы  $\mathbf{C}\mathbf{F} = \mathbf{E}$ , то окажется, что

$$\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \mathbf{y}(k). \quad (12.28)$$

Но это означает, что все  $r$  выходных координат восстанавливаются точно. Поэтому из модели наблюдателя можно исключить  $r$  уравнений. Порядок наблюдателя Льюинбергера в этом случае оказывается равным  $(n - r)$ .

**Пример.** Для системы

$$\Sigma^{(2)} : \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0, 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (1 \ 0)$$

найти структуру наблюдателя полного порядка, с характеристическим многочленом

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 + 20\lambda + 200.$$

Система вполне наблюдаема, поскольку

$$\text{rank}(\mathbf{C}^T : \mathbf{M}^T \mathbf{C}^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0, 1 \end{pmatrix} = 2,$$

поэтому задача синтеза наблюдателя разрешима.

Полюсы наблюдателя совпадают характеристическими числами матрицы  $(\mathbf{M} - \mathbf{F}\mathbf{C})$ , где  $\mathbf{F} = (f_1 \ f_2)$ .

Найдем эти числа из условия синтеза

$$\varphi(\lambda; \mathbf{F}) = \det(\lambda\mathbf{E} - (\mathbf{M} - \mathbf{F}\mathbf{C})) = \lambda^2 + (f_1 - 5)\lambda + (4 - f_1 + 0, 1f_2) = \varphi^*(\lambda),$$

которое выполняется, если

$$\begin{aligned} f_1 - 5 &= 0, 2; \\ 4 - f_1 + 0, 1f_2 &= 0, 75. \end{aligned}$$

Это возможно, если  $f_1 = 5, 2$ ;  $f_2 = 175, 5$ .

Структуру полного наблюдателя второго порядка определяет разностное уравнение

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \begin{pmatrix} -4, 2 & 0, 1 \\ -175, 5 & 4 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \begin{pmatrix} 5, 2 \\ 175, 5 \end{pmatrix} y(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k).$$

Найдем структуру наблюдателя Люинбергера первого порядка.  
Потребуем выполнения условия

$$\mathbf{E} = \mathbf{CF}: \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = f_1.$$

Теперь структуру наблюдателя Люинбергера определяет уравнение

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k|k) &= (\mathbf{E} - \mathbf{FC})(\mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{N}u(k-1)) + \mathbf{F}y(k) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_2 & f_2 + 4 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \begin{pmatrix} 1 \\ f_2 \end{pmatrix} y(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k-1). \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\hat{x}_2(k|k) = f_2 \hat{x}_1(k-1|k-1) + (f_2 + 4) \hat{x}_2(k-1|k-1) + f_2 y(k) + u(k-1).$$

Выбором числового значения  $f_2$  можно улучшать качество процесса восстановления. Оценка первой координаты, очевидно, совпадает с выходом системы и поэтому не требует вычисления.

#### 12.4. УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Определить параметры цифрового ПИ-регулятора для объекта управления с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)},$$

так чтобы установившаяся ошибка воспроизведения единичного скачка была нулевой.

**2.** Для типовой структуры цифровой системы управления с передаточной функцией непрерывной части прямой цепи  $W(z)$  установившуюся ошибку определяет выражение

$$e^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kh) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1+W(z)} R(z), \quad (12.29)$$

где  $R(z)$  —  $Z$ -преобразование задающего сигнала.

Показать, что установившаяся ошибка обработки единичного ступенчатого воздействия равна

$$e^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+W(z)}, \quad (12.30)$$

а установившаяся ошибка обработки единичного линейного воздействия

$$e^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{h}{(z-1)W(z)}. \quad (12.31)$$

**3.** Цифровой регулятор может быть реализован в виде последовательно соединенных фиксатора нулевого порядка и импульсного  $RC$ -фильтра. Описать внешнюю модель такого регулятора. Найти передаточную функцию импульсного  $RC$ -фильтра для реализации регулятора с передаточной функцией:

$$\bullet \quad W_p(z) = \frac{z(z-0,1)}{z-0,8},$$

$$\bullet W_p(z) = \frac{z - 0,1}{z(z - 0,8)}.$$

4. Найти дискретные представления передаточных функций типовых регуляторов, используя аппроксимации Эйлера, обратной разности и Тустена. Определить соотношения между соответствующими параметрами непрерывного и дискретного представлений.

5. Найти структуру линейного регулятора для стабилизации состояния объекта, модель которого задана матрицами

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0,5h^2 \\ h \end{pmatrix}.$$

Замкнутая система стабилизации должна иметь характеристический многочлен вида

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2.$$

6. Осуществить линейный синтез замкнутой дискретной системы с заданным характеристическим многочленом

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 + 0,1\lambda + 0,06,$$

если неизменяемая часть системы задана матрицами

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0,08 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,04 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h = 0,5.$$

Выполнить моделирование переходного процесса в синтезированной системе.

7. Найти структуру линейного регулятора для аperiодической стабилизации состояния объекта, модель которого задана матрицами

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0,5h^2 \\ h \end{pmatrix}.$$

Изобразить процесс перевода системы из состояния  $x(0)$  в начало координат для двух случаев:  $\bullet h = 0,1$ ;  $\bullet h = 0,5$ .

8. Для системы, которая задана матрицами

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0,5h^2 \\ h \end{pmatrix}:$$

- найти алгоритм вычисления неизмеряемой координаты состояния  $x_2(k)$  по результатам измерений выхода и входа;
- синтезировать асимптотический наблюдатель полного порядка с характеристическим многочленом общего вида

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2;$$

- определить структуру асимптотического наблюдателя Люинбергера первого порядка;

- выполнить моделирование процесса восстановления неизмеряемых координат состояния системы.

9. Найти структуру наблюдателя полного порядка для системы

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (2 \ 0),$$

так чтобы характеристический полином наблюдателя был равен

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 + 10\lambda.$$

Замкнуть систему с управлением  $\mathbf{u}(k) = -\mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}(k)$ .

Определить процесс стабилизации при произвольных начальных отклонениях от положения покоя.

10. Для непрерывной системы

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 0); \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найти структуру непрерывного регулятора, при котором бы замкнутая система имела полюсы  $5 \pm j4$ .

Выполнить:

- дискретизацию непрерывного регулятора. Подобрать необходимый шаг дискретизации;
- синтез цифровой системы управления, используя в структуре асимптотический наблюдатель полного порядка. Сравнить результаты, моделируя процессы управления.



## СИНТЕЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

- Задачи стохастического синтеза
- Синтез управления с минимальной дисперсией ошибки
- Оптимальная стохастическая фильтрация
- Фильтры Калмана
- Параметрическая идентификация
- Упражнения

### 13.1. ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА

Рассмотрим линейную автоматическую систему с передаточной функцией  $H(s)$  и импульсной характеристикой  $k(t)$ , которая испытывает со стороны входа непрерывное стохастическое воздействие  $\varphi(t)$  в виде суммы полезного задающего сигнала  $u(t)$  и помехи  $\mu(t)$ . Пусть обе составляющие входного воздействия представлены стационарными случайными процессами с нулевым средним. Назначение системы состоит в том, чтобы возможно точно воспроизвести полезную составляющую  $u(t)$  входного сигнала.

Будем оценивать точность воспроизведения по значению разности

$$\varepsilon(t; \eta) = u(t + \eta) - y(t), \quad (13.1)$$

называемой:

- *ошибкой фильтрации*, если  $\eta = 0$ ;
- *ошибкой сглаживания*, если  $\eta < 0$ ;
- *ошибкой прогноза*, если  $\eta > 0$ .

В этой связи будем различать три задачи синтеза системы управления для воспроизведения полезного входного сигнала с минимальной дисперсией ошибки: *фильтрации*, *прогноза* и *сглаживания*.

В каждой задаче, необходимо найти такую передаточную функцию  $H(s)$  замкнутой системы, чтобы для нее

$$\mathbb{M}\varepsilon^2(t; \eta) \rightarrow \min_{H(s)}. \quad (13.2)$$

Выполним более общую постановку задачи синтеза. Пусть система задана своей внутренней моделью

$$\Sigma^{(n)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}): \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mu(t); \quad \mathbf{x}(0),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t),$$

где  $\mu(t)$  — белый шум интенсивности  $Q_\mu$ ;  $\mathbf{x}(0)$  — начальное состояние системы, которое будем рассматривать как стохастическую переменную с нулевым средним и дисперсией

$$\mathbb{M}[\mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0)] = Q_0.$$

Задача *оптимального стохастического синтеза регулятора* состоит в том, чтобы отыскать такое управление  $\mathbf{u}(t)$ , которое переводит систему  $\Sigma^{(n)}$ :  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  из начального состояния  $\mathbf{x}(0)$  в положение покоя с минимальным значением критерия качества

$$J = \mathbb{M} \int_0^T (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{R}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}_2\mathbf{u}(t))dt, \quad (13.3)$$

где  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$  — положительно определенные симметрические матрицы.

В том случае, когда действующая на систему помеха  $\beta(t)$  не является белым шумом, задача синтеза, тем не менее, может быть сведена к настоящей формулировке. Для этого следует рассматривать  $\beta(t)$  как выходной сигнал некой линейной динамической системы, возмущаемой белым шумом

$$\begin{aligned} \Sigma^{(m)}: \quad \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}_\beta\mathbf{z}(t) + \mu(t); \quad \mathbf{z}(0), \\ \beta(t) &= \mathbf{C}_\beta\mathbf{z}(t). \end{aligned} \quad (13.4)$$

Теперь модель системы управления  $\Sigma^{(n+m)}$  имеет расширенный вектор состояния  $\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{pmatrix}$  расширенную блочную матрицу состояния  $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}_\beta \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_\beta \end{pmatrix}$ , матрицу управления  $\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$  и вектор возмущения  $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mu(t) \end{pmatrix}$ , содержащий белый шум. Структуры основной и расширенной систем управления представлены на рис. 13.1, а, б соответственно.

Рассмотрим линейную систему, которая предназначена для воспроизведения случайного командного сигнала  $\rho(t)$  с известными стохастическими характеристиками. Выполним постановку задачи синтеза *оптимальной стохастической следящей системы*, как частный случай задачи синтеза оптимального регулятора.

Командный случайный сигнал будем рассматривать как выходной сигнал динамической системы, возмущаемой белым шумом

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}_\rho\mathbf{z}(t) + \mu(t), \\ \rho(t) &= \mathbf{C}_\rho\mathbf{z}(t), \end{aligned} \quad (13.5)$$

где  $\mu(t)$  — белый шум интенсивности  $Q_\mu$ .

Объединим модель системы и модель задания, введя в рассмотрение расширенный вектор состояния  $\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{pmatrix}$ , расширенную матрицу состояния  $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_\rho \end{pmatrix}$ , матрицу управления  $\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$  и вектор возмущения  $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mu(t) \end{pmatrix}$ .

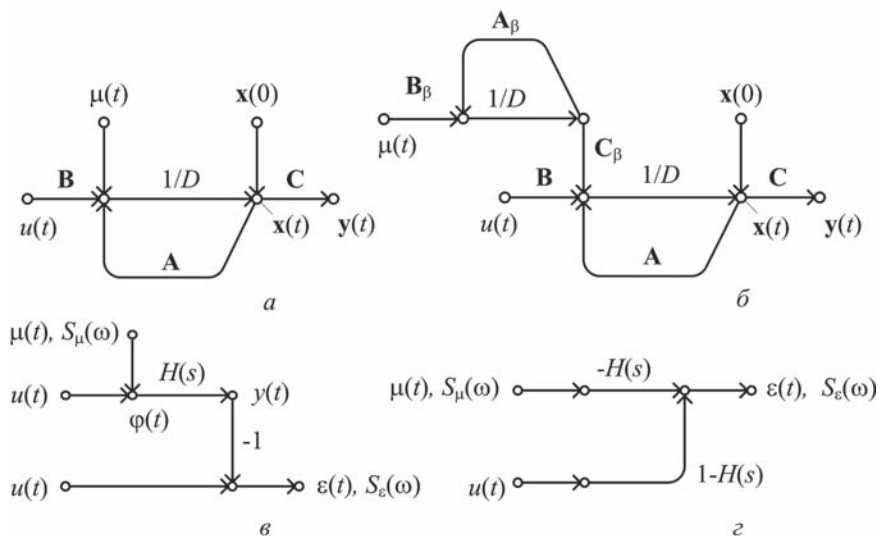


Рис. 13.1

Структура основной (а) и расширенной систем управления (б); эквивалентные структурные схемы образования ошибки фильтрации в реальной системе с  $H(s)$  и идеальной с передаточной функцией, равной единице (в) и преобразованная структурная схема системы (г)

Необходимо синтезировать управление  $u(t)$ , при котором система (13.3) отслеживает командный сигнал  $\rho(t)$  с минимальным значением критерия качества

$$J = \mathbb{M} \int_0^T (\varepsilon^T(t) \mathbf{R}_1 \varepsilon(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}_2 \mathbf{u}(t)) dt, \tag{13.6}$$

где  $\varepsilon(t) = \mathbf{x}(t) - \rho(t)$  — ошибка слежения.

### 13.2. СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ С МИНИМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ОШИБКИ

На рис. 13.1, в представлена структурная схема образования ошибки фильтрации, в которой изображена реальная система с передаточной функцией  $H(s)$  и идеальная система с передаточной функцией, равной единице.

Пусть первоначально поставлена задача параметрического синтеза системы слежения, которая состоит в том, чтобы при известной с точностью до параметров передаточной функции системы  $H(s; \alpha, \beta, \dots, \gamma)$ , найти значения параметров, при которых дисперсия ошибки фильтрации была бы минимальной.

Значение дисперсии ошибки фильтрации  $J = \mathbb{M}\varepsilon^2(t)$ , которой оценивается качество слежения, можно найти, зная спектральную плотность ошибки  $S_\varepsilon(\omega)$ . В самом деле,

$$\mathbb{M}\varepsilon^2(t) = R_\varepsilon(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega) d\omega. \quad (13.7)$$

Спектральная плотность ошибки фильтрации, в свою очередь, можно найти, зная спектральные плотности  $S_u(\omega)$ ,  $S_\mu(\omega)$  задающего сигнала  $u(t)$  и помехи  $\mu(t)$  соответственно:

$$S_\varepsilon(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_\mu(\omega) + |1 - H(j\omega)|^2 S_u(\omega), \quad (13.8)$$

что следует из схемы, представленной на рис. 13.1, *г*, которая эквивалентна схеме, изображенной на рис. 13.1, *в*.

Таким образом, искомое значение *среднего квадрата ошибки* фильтрации входного сигнала может быть вычислено в виде

$$\mathbb{M}\varepsilon^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (|H(j\omega)|^2 S_\mu(\omega) + |1 - H(j\omega)|^2 S_u(\omega)) d\omega. \quad (13.9)$$

Для вычисления этой оценки, в том случае, когда подынтегральное выражение является дробно-рациональным, следует воспользоваться формулой Парсевала и процедурой вычисления дисперсии (см. гл. 7).

Оценка  $J = \mathbb{M}\varepsilon^2(t)$  является функцией параметров  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$  системы в силу того, что передаточная функция системы  $H(s; \alpha, \beta, \dots, \gamma)$  определена с точностью до параметров. Поэтому, для завершения задачи синтеза необходимо минимизировать скалярную функцию  $J(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ , что позволит найти оптимальные значения параметров передаточной функции системы.

Вернемся, однако, к общей постановке задаче синтеза.

Рассмотрим систему с передаточной функцией  $H(s)$  или импульсной характеристикой  $k(t)$ . Пусть  $\varphi(t)$  — входной сигнал системы, включающий полезный задающий сигнал  $u(t)$  и аддитивную помеху  $\mu(t)$ . Пусть  $y(t)$  — установившийся выходной сигнал системы, равный

$$y(t) = \int_0^{\infty} \varphi(t - \tau) k(\tau) d\tau.$$

Задача фильтрации состоит в определении такой импульсной характеристики  $k(t)$  или передаточной функции  $H(s)$  системы, которые позволяют фильтровать помеху с минимумом среднеквадратической ошибки:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\varepsilon^2(t) &\rightarrow \min_{H(s)}, \\ \varepsilon(t) &= u(t) - y(t). \end{aligned}$$

Найденную характеристику, или передаточную функцию, будем называть *оптимальной*, а саму систему *оптимально-фильтрующей*.

Раскроем и преобразуем выражение для квадратической ошибки:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\varepsilon^2(t) &= \mathbb{M}\left[u(t) - \int_0^\infty \varphi(t-\tau)k(\tau)d\tau\right]^2 = \\ &= \mathbb{M}u^2(t) - 2 \int_0^\infty k(\tau)\mathbb{M}[u(t)\varphi(t-\tau)]d\tau + \\ &+ \int_0^\infty k(\tau) \int_0^\infty k(\theta)\mathbb{M}[\varphi(t-\tau)\varphi(t-\theta)]d\theta d\tau = \\ &= R_u(0) - 2 \int_0^\infty k(\tau)R_{\varphi u}(\tau)d\tau + \int_0^\infty k(\tau) \int_0^\infty k(\theta)R_\varphi(\tau-\theta)d\theta d\tau. \end{aligned}$$

В этом выражении корреляционные функции  $R_u$ ,  $R_{\varphi u}$ ,  $R_\varphi$  — известные характеристики, поскольку предполагаются известными стохастические свойства случайных процессов  $u(t)$ ,  $\mu(t)$ . Неизвестным в этом выражении является импульсная характеристика  $k(t)$ .

**Теорема (N. Wiener, E. Hopf, 1932).** *Оптимальная импульсная характеристика системы  $k^*(t)$ , при которой  $\mathbb{M}\varepsilon^2(t)$  достигает минимального значения, удовлетворяет интегральному уравнению:*

$$R_{\varphi u}(\tau) - \int_0^\infty k^*(\theta)R_\varphi(\tau-\theta)d\theta = 0, \quad \tau \geq 0. \quad (13.10)$$

Это утверждение формулирует необходимое и достаточное условие минимума среднеквадратической ошибки фильтрации.

Заметим, что интеграл в **уравнении Винера–Хопфа** имеет вид свертки и совпадает со взаимной корреляционной функцией выхода ко входу  $R_{\varphi y}(\tau)$ , поэтому это уравнение можно записать в лаконичной форме:

$$R_{\varphi y}(\tau) = R_{\varphi u}(\tau). \quad (13.11)$$

Решением проблемы синтеза оптимально-фильтрующей системы занимались многие исследователи, существенный результаты получили А. Н. Колмогоров и Н. Винер.

Последнему более простому, предложенному *Норбертом Винером* в 1943 году, частотному методу решения задачи синтеза оптимально-фильтрующей системы.

Пусть  $S_\varphi(\omega)$  — спектральная плотность входного сигнала. Эта функция четная и положительная, поэтому представим ее в виде произведения двух комплексно-сопряженных функций

$$S_\varphi(\omega) = |\Psi(j\omega)|^2 = \Psi(j\omega)\Psi(-j\omega). \quad (13.12)$$

Такое преобразование называют *факторизацией*.

Представим искомую передаточную функцию в виде произведения

$$H(s) = \Psi^{-1}(s)G(s), \quad (13.13)$$

такому представлению отвечает последовательное соединение двух частей системы: с передаточными функциями  $\Psi^{-1}(s)$ ,  $G(s)$  соответственно.

Пусть  $z(t)$  — промежуточная между этими частями переменная, ее спектральная плотность

$$S_z(\omega) = |\Psi^{-1}(j\omega)|^2 S_\varphi(\omega) = 1.$$

Значит  $z(t)$  — белый шум единичной интенсивности и его автокорреляционная функция  $R_z(\tau) = \delta(\tau)$ .

Для того чтобы система с  $H(s)$  оптимально фильтровала сигнал входа  $\varphi(t)$ , необходимо, чтобы часть системы с передаточной функцией  $G(s)$  оптимально фильтровала свой входной сигнал  $z(t)$ . Но это возможно, когда  $g(t)$  — импульсная характеристика второй части системы удовлетворяет уравнению Винера–Хопфа.

$$R_{zu}(\tau) = \int_0^\infty g^*(\theta)R_z(\tau - \theta)d\theta = \int_0^\infty g^*(\theta)\delta(\tau - \theta)d\theta = g^*(\tau). \quad (13.14)$$

Получен интересный результат  $g^*(\tau) = R_{zu}(\tau)$ : импульсная характеристика части оптимально-фильтрующей системы совпадает со взаимной корреляционной функцией полезного сигнала и белого шума.

Осталось найти функцию  $R_{zu}(\tau)$ .

Спектральная плотность и корреляционная функции случайного процесса связаны преобразованием Фурье, поэтому

$$R_{zu}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{zu}(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (13.15)$$

Кроме того,

$$S_{zu}(\omega) = \Psi^{-1}(-j\omega)S_{\varphi u}(\omega) = \Psi^{-1}(-j\omega)S_u(\omega).$$

Это соотношение справедливо, потому что задающий сигнал  $u(t)$  и помеха  $\mu(t)$  независимы. Собрав вместе эти соотношения, получим выражение для искомой импульсной характеристики

$$g^*(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^{-1}(-j\omega)S_u(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (13.16)$$

Теперь можно определить передаточную функцию  $G(s)$  как преобразование Лапласа от импульсной характеристики

$$G(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-s\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^{-1}(-j\omega)S_u(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega d\tau. \quad (13.17)$$

Обозначим

$$\Psi^{-1}(-j\omega)S_u(\omega) = N(j\omega). \quad (13.18)$$

Рассмотрим функцию  $N(s)$ , которая получается из  $N(j\omega)$  заменой  $j\omega$  на  $s$ . Функция  $N(s)$  — дробно-рациональная, поэтому ее можно представить в виде суммы двух дробно-рациональных выражений

$$N(s) = N^+(s) + N^-(s), \quad (13.19)$$

одно из которых имеет полюсы только в левой полуплоскости, другое — только в правой. Винер доказал, что для физически реализуемых систем

$$G(s) = N^+(s).$$

Таким образом, искомую передаточную функцию оптимально-фильтрующей системы определяет выражение

$$H^*(s) = \frac{N^+(s)}{\Psi(s)}. \quad (13.20)$$

Приведенные рассуждения достаточно конструктивны, чтобы сформировать алгоритм синтеза звена оптимально-фильтрующего аддитивную помеху.

### Примеры:

1. На вход замкнутой системы с передаточной функцией

$$H(s; k) = \frac{k}{Ts + 1}$$

действует полезный случайный сигнал со спектральной плотностью

$$S_u(\omega) = \frac{b}{\omega^2 + a^2}$$

и помеха в виде белого шума интенсивности  $c^2$ . Следует подобрать параметр системы  $k$  так, чтобы минимизировать среднеквадратическую ошибку воспроизведения полезного сигнала.

Найдем составляющие спектральной плотности ошибки

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 S_u(\omega) &= \frac{c^2 k^2}{1 + T^2 \omega^2}; \\ |1 - H(j\omega)|^2 S_u(\omega) &= \frac{b((1 - k)^2 + T^2 \omega^2)}{(1 + T^2 \omega^2)(\omega^2 + a^2)}, \end{aligned}$$

а затем путем прямого интегрирования по (13.9) определим и соответствующие составляющие среднего квадрата ошибки

$$J(k) = \mathbb{M}\varepsilon^2(t) = \frac{c^2 k^2}{2T} + \frac{b((1 - k)^2 + Ta)}{2a(1 + Ta)}.$$

Найденная оценка зависит от переменного  $k$ . Необходимое условие минимума этой оценки составляет уравнение

$$\frac{d}{dk}J(k) = \frac{c^2k}{T} + \frac{b(k-1)}{a(1+Ta)} = 0,$$

откуда находим искомое оптимальное значения параметра передаточной функции синтезированной системы

$$k^* = \frac{Tb}{ac^2(1+Ta) + Tb}.$$

2. Следящая система канонической структуры имеет передаточную функцию прямого тракта

$$W(s; k) = \frac{k}{s(s+2)}.$$

Задающий сигнал системы является случайным со спектральной плотностью

$$S_u(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}.$$

На систему воздействует помеха в виде белого шума интенсивности  $c^2$ . Определить коэффициент передачи системы, при котором дисперсия ошибки фильтрации была бы минимальной.

Передаточная функция ошибки системы от помехи равна

$$H_{e\mu}(s) = -\frac{W(s)}{1+W(s)} = -\frac{k}{s(s+2)+k},$$

передаточная функция ошибки системы от входного сигнала —

$$H_{eu}(s) = 1 - H(s) = \frac{s(s+2)}{s(s+2)+k}.$$

Поэтому составляющие спектральной плотности ошибки соответственно от помехи и полезного сигнала принимают вид:

$$S_{e\mu}(\omega) = \frac{c^2k^2}{|(j\omega)^2 + 2j\omega + k|^2};$$

$$S_{eu}(\omega) = \left| \frac{j\omega(j\omega+2)}{j\omega(j\omega+2)+k} \right|^2 \frac{1}{1+\omega^2} = \frac{(j\omega)^4 - 4(j\omega)^2}{|(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + (2+k)j\omega + k|^2}.$$

Спектральная плотность ошибки складывается из двух составляющих дробно-рационального вида, поэтому дисперсию ошибки можно вычислить используя *таблицы Мак-Ленна*, или матричным методом (см. гл. 7).

Воспользуемся матричным методом. Параметры дробно-рационального выражения составляющей спектральной плотности от помехи  $S_{e\mu}(\omega)$  таковы:

$$n = 2; \quad a_0 = 1; a_1 = 2; a_2 = k; \quad b_1 = 0; b_2 = c^2k^2.$$



Поэтому соответствующая составляющая дисперсии ошибки равна

$$(-1)^3 \frac{N_2}{2a_0 G_2} = 0, 25c^2 k.$$

В этом выражении  $G_2$  — определитель матрицы Гурвица многочлена  $(j\omega)^2 + 2j\omega + k$ , который равен  $2k$ .

Значение  $N_2$  получаем из той же матрицы Гурвица заменой ее первой строки на элементы  $b_1, b_2$ :

$$N_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & c^2 k^2 \\ 1 & k \end{pmatrix} = -c^2 k^2.$$

Дробно-рациональное выражение составляющей  $S_{eu}(\omega)$  спектральной плотности от задающего сигнала задается параметрами:

$$n = 3; \quad a_0 = 1; a_1 = 3; a_2 = 2 + k; a_3 = k; \quad b_1 = 1; b_2 = -4; b_3 = 0,$$

поэтому соответствующая составляющую дисперсию ошибки определяет выражение

$$(-1)^4 \frac{N_3}{2a_0 G_3},$$

где  $G_3 = 2k(k + 3)$  — определитель матрицы Гурвица многочлена

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + (2 + k)j\omega + k.$$

Выражение для  $N_3 = k(k + 6)$  получаем из той же матрицы Гурвица заменой ее первой строки на элементы  $b_1, b_2, b_3$ . В результате составляющая дисперсии ошибки от задающего сигнала равна

$$\frac{k + 6}{4(k + 3)}.$$

Полное выражение для дисперсии ошибки воспроизведения задающего сигнала принимает вид

$$J(k) = \frac{c^2 k^2 + (3c^2 + 1)k + 6}{4(k + 3)}.$$

Минимизация этого выражения позволяет найти оптимальное в смысле

$$\mathbb{M}\varepsilon^2(t; \eta) \rightarrow \min_{H(s)}$$

выражение для коэффициента передачи системы:

$$\frac{d}{dk} J(k) = 3 - c^2(k + 3)^2 = 0,$$

откуда следует, что  $k^* = \frac{1,73}{c} - 3$ .

3. Пусть полезное входное воздействие имеет вид случайного телеграфного сигнала неизменной единичной амплитуды с числом перемен знака на интервале, распределенным по закону Пуассона с параметром равным 0,5. Аддитивная помеха представляет собой белый шум интенсивности  $c^2$ . Найти передаточную функцию оптимального фильтра.

Полезный сигнал имеет спектральную плотность

$$S_u(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1},$$

поэтому спектральная плотность входного сигнала

$$S_\varphi(\omega) = c^2 + \frac{1}{\omega^2 + 1} = \frac{c^2\omega^2 + (c^2 + 1)}{\omega^2 + 1}.$$

Выполним факторизацию этого выражения

$$S_\varphi(\omega) = \frac{\sqrt{c^2 + 1} + jc\omega}{1 + jc\omega} \cdot \frac{\sqrt{c^2 + 1} - jc\omega}{1 - jc\omega},$$

следовательно,

$$\begin{aligned}\Psi(j\omega) &= \frac{\sqrt{c^2 + 1} + jc\omega}{1 + jc\omega}; \\ \Psi(s) &= \frac{\sqrt{c^2 + 1} + cs}{1 + s}.\end{aligned}$$

Полезный сигнал и помеха независимы, поэтому  $S_{\varphi u}(\omega) = S_u(\omega)$ , а значит функция

$$N(j\omega) = \frac{(1 - jc\omega)}{(\omega^2 + 1)(\sqrt{c^2 + 1} - jc\omega)} = \frac{1}{(1 + jc\omega)(\sqrt{c^2 + 1} - jc\omega)},$$

но тогда

$$N(s) = \frac{1}{(1 + s)(\sqrt{c^2 + 1} - cs)}.$$

Разложим функцию  $N(s)$  в сумму двух правильных дробей и выделим те, которые имеют полюсы в левой комплексной полуплоскости.

$$\begin{aligned}N(s) &= \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1} + c} \left( \frac{1}{1 + s} + \frac{c}{(\sqrt{c^2 + 1} - cs)} \right); \\ N^+(s) &= \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1} + c} \frac{1}{1 + s}.\end{aligned}$$

Искомая передаточная функция оптимального фильтра имеет вид

$$H^*(s) = \frac{N^+(s)}{\Psi(s)} = \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1} + c} \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1} + cs}.$$

Фильтр оказался инерционным звеном первого порядка с коэффициентом передачи и постоянной времени равными

$$k^* = \frac{1}{c\sqrt{c^2 + 1} + c^2 + 1};$$

$$T^* = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}}.$$

4. Полезный сигнал с известной спектральной плотностью  $S_u(\omega)$  очень слаб на фоне помехи, которая является белым шумом интенсивности  $c^2$ . Найти структуру фильтра, восстанавливающего полезный сигнал с минимальной среднеквадратической ошибкой.

По условиям задачи спектральная плотность входного сигнала  $S_\varphi(\omega)$  практически неизменна и равна  $c^2$ , поэтому в результате факторизации получаем  $\psi(s) = c$ .  
Функция

$$N(j\omega) = \frac{S_u(\omega)}{c},$$

но тогда оказывается, что

$$N^+(j\omega) = \frac{S_u(\omega)}{c}.$$

Все это позволяет определить частотную характеристику оптимального фильтра

$$H^*(j\omega) = \frac{S_u(\omega)}{c^2},$$

которая оказалась пропорциональной спектральной плотности полезного сигнала и коэффициент пропорциональности — величина обратная интенсивности шума.

5. На вход следящей системы с передаточной функцией разомкнутой части

$$W(s) = \frac{k}{s(10s + 1)}$$

воздействуют аддитивно два случайных сигнала:  $u(t)$  — задающий со спектральной плотностью

$$S_u(\omega) = \frac{2a}{\omega^2 + a^2};$$

помеха  $\mu(t)$  — белый шум интенсивности  $c^2$ . Найти значение коэффициента передачи, минимизирующее среднеквадратичное отклонение ошибки воспроизведения.

Найдем спектральную плотность сигнала ошибки воспроизведения задающего сигнала

$$S_\varepsilon(\omega) = |1 - H(j\omega)|^2 S_u(\omega) + |H(j\omega)|^2 c^2,$$

$$H(j\omega) = \frac{k}{10s^2 + s + k} \Big|_{s=j\omega},$$

а затем и дисперсию ошибки

$$D_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega) d\omega.$$

Выражение для спектральной плотности сигнала ошибки является дробно-рациональным, состоящим из двух слагаемых. Для первого слагаемого:

$$S_{\varepsilon,1}(\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)};$$

$$B(j\omega) = 200a(j\omega)^4 - 2a(j\omega)^2;$$

$$A(j\omega) = 10(j\omega)^3 + (10a + 1)(j\omega)^2 + (k + a)(j\omega) + ka.$$

Коэффициенты многочленов числителя и знаменателя:

$$a_0 = 10; a_1 = (10a + 1); a_2 = (k + a); a_3 = ka; \quad b_1 = 200a; b_2 = -2a; b_3 = 0,$$

поэтому

$$D_{\varepsilon,1} = (-1)^4 \frac{N}{20G};$$

$$G = \det \begin{pmatrix} 10a + 1 & ka & 0 \\ 10 & k + a & 0 \\ 0 & 10a + 1 & ka \end{pmatrix} = ka(100a^2 + a + 1);$$

$$N = \det \begin{pmatrix} 200a & -2a & 0 \\ 10 & k + a & 0 \\ 0 & 10a + 1 & ka \end{pmatrix} = 20ka^2(10k + 10a + 1).$$

Первое слагаемое дисперсии равно

$$D_{\varepsilon,1} = \frac{a(10k + 10a + 1)}{100a^2 + a + k}.$$

Найдем второе слагаемое спектральной плотности сигнала ошибки:

$$S_{\varepsilon,2}(\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)};$$

$$B(j\omega) = c^2k^2;$$

$$A(j\omega) = 10(j\omega)^2 + (j\omega) + k.$$

Для этих выражений:  $a_0 = 10; a_1 = 1; a_2 = k; \quad b_1 = 0; b_2 = c^2k^2$ , поэтому

$$D_{\varepsilon,2} = (-1)^3 \frac{N}{20G};$$

$$G = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & k \end{pmatrix} = k;$$

$$N = \det \begin{pmatrix} 0 & c^2k^2 \\ 10 & k \end{pmatrix} = -10c^2k^2a^2(10k + 10a + 1).$$

Второе слагаемое дисперсии равно

$$D_{\varepsilon,2} = \frac{c^2k}{2}.$$

Искомая дисперсия сигнала ошибки воспроизведения задающего сигнала определяет выражение

$$D_\varepsilon(k; a, c) = \frac{a(10k + 10a + 1)}{100a^2 + a + k} + \frac{c^2 k}{2}.$$

Значение коэффициента усиления, минимизирующее дисперсию, найдем для частного случая, когда  $a = 0,01$  и  $c^2 = 0,01$ . Оптимальное значение  $k^* = 1,32$ .

### 13.3. ОПТИМАЛЬНАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Вернемся к общей постановке задачи синтеза. Пусть система задана своей внутренней моделью

$$\Sigma^{(n)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}): \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mu(t); \quad \mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{aligned}$$

где  $\mu(t)$  — белый шум интенсивности  $Q_\mu$ ;  $\mathbf{x}(0)$  — начальное состояние системы, рассматриваемое как стохастическая переменная с нулевым средним и дисперсией

$$\mathbb{M}\mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0) = Q_0.$$

Задача синтеза оптимального стохастического регулятора состоит в том, чтобы отыскать такое управление  $\mathbf{u}(t)$  для перевода системы из  $\mathbf{x}(0)$  в начало координат, при котором достигает минимума критерий качества

$$J = \mathbb{M} \int_0^T (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{R}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}_2\mathbf{u}(t))dt, \quad (13.21)$$

где  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$  — положительно-определенные симметрические матрицы.

Будем предполагать, как и ранее в детерминированном случае, что  $\mathbf{C} = \mathbf{E}$  все компоненты вектора состояния можно точно измерить в любой момент времени. В этом случае задача оптимального синтеза имеет решение в линейной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{K}(t) &= \mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t), \end{aligned} \quad (13.22)$$

где  $\mathbf{P}(t)$  — решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A} - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{R}_1 = 0, \quad \mathbf{P}(T) = 0. \quad (13.23)$$

В том случае, когда время регулирования  $T$  достаточно велико, функция  $\mathbf{P}(t)$  имеет установившееся значение  $\tilde{\mathbf{P}}$ , которое удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\mathbf{A}^T\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{B}^T\tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{R}_1 = 0. \quad (13.24)$$

Закон управления

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{K} &= \mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{B}^T\tilde{\mathbf{P}} \end{aligned} \quad (13.25)$$

оказывается оптимальным, поскольку минимизирует критерий

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{M}[\mathbf{x}^T(t)\mathbf{R}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}_2\mathbf{u}(t)]. \quad (13.26)$$

Отсюда минимальное значение этого критерия

$$J^* = \text{Tr}(\mathbf{P}\mathbf{Q}_\mu).$$

Задача синтеза оптимальной стохастической следящей системы состоит в том, чтобы отыскать такое управление  $\mathbf{u}(t)$ , при котором система  $\Sigma^{(n)}$ :  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  отслеживает командный сигнал  $\rho(t)$  с минимальным значением критерия качества

$$J = \mathbb{M} \int_0^{\infty} (\varepsilon^T(t)\mathbf{R}_1\varepsilon(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}_2\mathbf{u}(t))dt, \quad (13.27)$$

где  $\varepsilon(t) = y(t) - \rho(t)$  — ошибка слежения.

Вновь предположим, что все координаты вектора состояния доступны для измерения  $\mathbf{C} = \mathbf{E}$ , в этом случае задача синтеза оптимальной стохастической следящей системы имеет решение в линейной форме

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}\mathbf{z}(t), \quad (13.28)$$

где  $\mathbf{K} = \mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{11}$  — матрица коэффициентов обратных связей системы,  $\mathbf{F} = -\mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{12}$  — матрица коэффициентов прямых связей системы.

Матрицы  $\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}$  — элементы блочной матрицы

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix},$$

удовлетворяют системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{11}\mathbf{A} - \mathbf{P}_{11}\mathbf{B}\mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{11} + \mathbf{C}^T\mathbf{R}_1\mathbf{C} &= 0; \\ \mathbf{A}^T\mathbf{P}_{12} + \mathbf{P}_{12}\mathbf{A}_\rho - \mathbf{P}_{11}\mathbf{B}\mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{12} + \mathbf{C}^T\mathbf{R}_1\mathbf{C}_\rho &= 0; \\ \mathbf{A}_\rho^T\mathbf{P}_{22} + \mathbf{P}_{22}\mathbf{A}_\rho - \mathbf{P}_{12}\mathbf{B}\mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{12} + \mathbf{C}_\rho^T\mathbf{R}_1\mathbf{C}_\rho &= 0. \end{aligned} \quad (13.29)$$

Из первого уравнения системы следует, что матрица  $\mathbf{P}_{11}$  и, следовательно, матрица обратных связей системы  $\mathbf{K}$ , определяется только свойствами модели системы и не зависит от стохастических свойств командного сигнала  $\rho(t)$ , поэтому управление может быть определено как в детерминированном случае. Матрицы  $\mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{22}$  и, следовательно, матрица прямых связей  $\mathbf{F}$ , естественно, зависят от стохастических свойств задающего сигнала.

На рис.13.2, а приведена структура модели оптимальной стохастической следящей системы.

**Пример.** Исполнительным механизмом следящей системы является двигатель постоянного тока, модель которого

$$\dot{x}(t) = -0,1x(t) + 1,5u(t).$$

Найти структуру управляющего устройства, чтобы система максимально точно отслеживала случайное задание  $\rho(t)$ .

Автокорреляционная функция этого случайного процесса имеет вид

$$R_\rho(\tau) = 25e^{-0,4|\tau|}.$$

Определим динамическую систему, генерирующую случайный командный сигнал  $\rho(t)$  под воздействием белого шума. Спектральная плотность этого процесса имеет вид

$$S_\rho(\omega) = \frac{20}{\omega^2 + 0,16},$$

что позволяет представить эту функцию в виде

$$S_\rho(\omega) = 20 \frac{1}{|j\omega + 0,4|^2}.$$

Поэтому передаточная функция динамического звена, формирующего процесс  $\rho(t)$ , принимает вид

$$W_\rho(s) = \frac{1}{s + 0,4},$$

а модель процесса описывает линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{\rho}(t) = -0,4\rho(t) + \mu(t),$$

где  $\mu(t)$  — белый шум интенсивности  $20\text{ с}^{-2}$ . Введем расширенный вектор состояния

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \rho(t) \end{pmatrix},$$

тогда расширенная модель управляемого объекта и формирующего фильтра принимает вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\rho}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ 0 & -0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \rho(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu(t).$$

Для завершения постановки задачи синтеза выберем критерий качества в виде

$$J = \mathbb{M} \int_0^\infty ((x(t) - \rho(t))^2 + 100u^2(t)) dt.$$

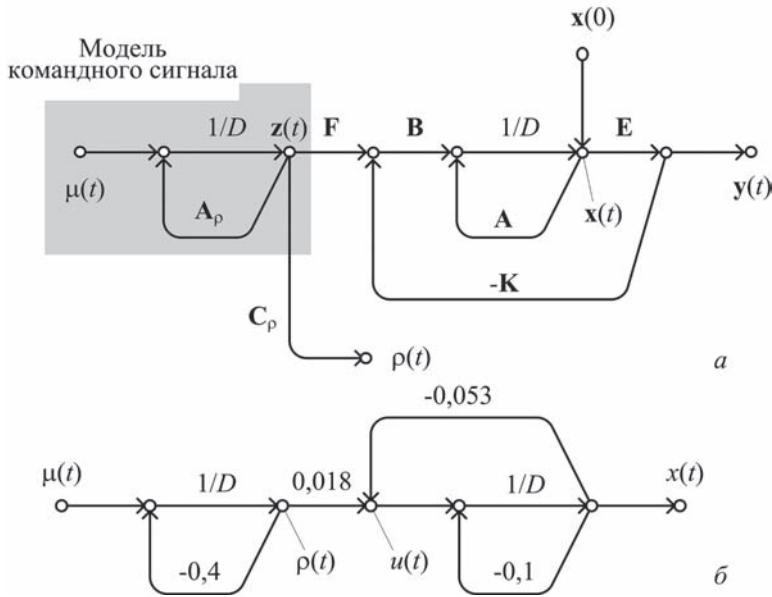


Рис. 13.2

а — структура модели оптимальной стохастической следящей системы; б — структура оптимальной стохастической следящей системы.

Будем искать управление в виде  $u(t) = -Kx(t) + F\rho(t)$ , где

$$K = R_2^{-1} B^T P_{11} = 0,015 P_{11};$$

$$F = -R_2^{-1} B^T P_{12} = -0,015 P_{12}.$$

Числа  $P_{11}$ ,  $P_{12}$  удовлетворяют уравнениям:

$$0,0225(P_{11})^2 + 0,2P_{11} - 1 = 0;$$

$$(0,8 + 0,01P_{11})P_{12} + 1 = 0,$$

поэтому  $P_{11} = 3,57$ ;  $P_{12} = -1,2$ .

Искомые коэффициенты прямой и обратной связи равны:

$$F = 0,018; \quad K = 0,053.$$

Структура оптимальной стохастической следящей системы принимает вид, приведенный на рис. 13.2, б.

Для полного определения матрицы  $\tilde{P}$  найдем  $P_{22}$  из уравнения:

$$0,0225(P_{12})^2 + 0,8P_{22} - 1 = 0,$$

поэтому  $P_{22} = 1,21$ .



Таким образом,

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 3,57 & -1,2 \\ -1,2 & 1,21 \end{pmatrix},$$

что позволяет определить наименьшее значение критерия качества

$$J^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{M}[(x(t) - \rho(t))^2 + 100u^2(t)] = \text{Tr} \left( \tilde{P} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \right) = 24,2 c^{-2}.$$

Поэтому можно говорить о том, что среднеквадратическое отклонение выходного сигнала  $x(t)$  от задающего  $\rho(t)$  будет меньше  $24,2 c^{-2}$ .

### 13.4. ФИЛЬТРЫ КАЛМАНА

Современная теория стохастической фильтрации заложена в сороковых годах прошлого столетия трудами А. Н. Колмогорова и Н. Винера, которые независимо друг от друга использовали процедуры интерполяции и экстраполяции стационарных случайных последовательностей для решения задач измерения параметров траекторий летательных аппаратов по радарным данным.

Первые результаты теории позволяли синтезировать фильтр с минимальной среднеквадратичной ошибкой на основании интегрального уравнения Винера–Хопфа. Решение этого уравнения, предложено Винером, искать в частотной области с использованием разложения спектральной плотности на пару зеркально симметричных сомножителей и последующим порождением выходного процесса из белого шума. Предложенная процедура все же очень сложна и область ее применения оказалась довольно узкой.

Дальнейшее развитие теории фильтрации связано с именами Р. Калмана и Р. Бьюси. Ими решена задача фильтрации в пространстве состояний, найдены дискретный, а затем и непрерывный эквивалент интегрального уравнения Винера–Хопфа в виде матричного разностного и дифференциального уравнения соответственно.

Приведем результаты Калмана–Бьюси в виде теоремы и основанной на ней процедуры синтеза фильтра.

Рассматриваемая дискретная система испытывает стохастические воздействия в виде входного возмущения и шума измерений на выходе

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{(n)}: \quad & \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \alpha(k); \quad \mathbb{M}\mathbf{x}(0) = 0, \\ & y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \beta(k). \end{aligned} \quad (13.30)$$

Предполагается, что случайное начальное состояние, входная помеха и шум измерений являются взаимно не коррелированными случайными процессами типа белый шум с матрицами ковариаций  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}_\alpha$ ,  $\mathbf{R}_\beta$  соответственно.

Необходимо по результатам измерений выхода

$$\{y(k) \quad k = 0, 1, \dots\}$$

найти несмещенную оценку фазового вектора  $\hat{x}(k)$  состояния системы, оптимальную в смысле минимума дисперсии ошибки оценивания

$$\varepsilon(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k).$$

Задача синтеза фильтра разрешима утверждает первая теорема Калмана–Бьюси.

**Теорема** (*R. Kalman, R. Busy, 1960*). *Фильтр, формирующий линейную несмещенную оценку  $\hat{x}(k)$  с минимальной среднеквадратичной ошибкой для системы  $\Sigma_1^{(n)}$  описывается рекуррентным уравнением*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(k+1) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k); \quad \mathbf{x}^*(0) = 0, \\ \hat{\mathbf{x}}(k) &= \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{F}(k)(y(k) - \mathbf{C}\mathbf{x}^*(k)), \end{aligned} \quad (13.31)$$

где  $\mathbf{F}(k)$  — матрица коэффициентов усиления фильтра определяется соотношением

$$\mathbf{F}(k) = \mathbf{P}^*(k)\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{P}^*(k)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_\beta)^{-1}, \quad (13.32)$$

а матрица  $\mathbf{P}(k)$  ковариации ошибки оценивания удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k) &= \mathbf{P}^*(k) - \mathbf{F}(k)\mathbf{C}\mathbf{P}^*(k), \\ \mathbf{P}^*(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T + \mathbf{R}_\alpha, \quad \mathbf{P}^*(0) = \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (13.33)$$

Рассмотрим теперь более сложную в аналитическом смысле задачу синтеза фильтра Калмана–Бьюси для непрерывной системы, которая испытывает стохастические возмущения на входе и результаты измерения ее выхода зашумлены.

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{(n)} : \quad \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \alpha(t); \quad \mathbb{M}\mathbf{x}(0) = 0, \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \beta(t). \end{aligned} \quad (13.34)$$

Входное возмущение  $\alpha(t)$  и ошибки измерений  $\beta(t)$  являются случайными процессами типа белый шум с известными матрицами ковариации  $\mathbf{R}_\alpha$ ,  $\mathbf{R}_\beta$  соответственно.

Начальное состояние системы — случайный вектор с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации  $\mathbf{R}$ . Матрицы  $\mathbf{R}_\alpha$ ,  $\mathbf{R}_\beta$  симметричны, положительно определенные. Начальное положение, входные возмущения и ошибки измерений взаимно не коррелированы.

Необходимо по результатам измерений выхода  $\{y(t)\}$  найти несмещенную оценку фазового вектора  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  состояния системы, оптимальную в смысле минимума дисперсии ошибки оценивания

$$\varepsilon(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t).$$

Задача синтеза разрешима утверждает вторая теорема Калмана–Бьюси.

**Теорема** (*R. Kalman, R. Busy, 1961*). *Фильтр, формирующий линейную несмещенную оценку вектора состояния  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  с минимальной среднеквадратичной ошибкой для системы  $\Sigma_2^{(n)}$  описывается уравнением*

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{F}(t)(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)); \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = 0, \quad (13.35)$$

где матрица усиления  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{R}_\beta^{-1}$ , и матрица  $\mathbf{P}(t)$  ковариации ошибки оценивания удовлетворяет уравнению Риккати

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{A}\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T - \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{R}_\beta^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}(t) + \mathbf{R}_\alpha, \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{R}. \quad (13.36)$$

Заметим, что если стационарная система  $\Sigma_2^{(n)}$  испытывает стационарные стохастические возмущения, то при длительном наблюдении ошибка оценивания вектора состояния системы имеет стационарную матрицу ковариаций  $\tilde{\mathbf{P}}$ , которая удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T - \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{C}^T\mathbf{R}_\beta^{-1}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{R}_\alpha = 0. \quad (13.37)$$

При вычислении матрицы  $\mathbf{P}(t)$  следует учитывать, что она симметрическая и положительно полуопределенная.

#### Примеры:

1. Тело совершает поступательное движение из достоверно известной начальной точки под действием случайной силы. В дискретные моменты с шагом 1 с производят измерения положения тела. Результаты измерений зашумлены. Дискретная модель движения тела и измерения его положения представлена уравнением

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \alpha(k); \quad \mathbf{x}(0) = 0, \\ y(k) &= (1 \ 0) \mathbf{x}(k) + \beta(k), \end{aligned}$$

где  $\alpha(k)$  — дискретное случайное воздействие на тело;  $\beta(k)$  — шум в канале измерений.

Положим, что  $\alpha(k)$ ,  $\beta(k)$  — это гаусовы дискретные белые шумы с ковариационными матрицами соответственно:

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} 0,33 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_\beta = 1.$$

В начальный момент времени тело находится в покое, следовательно,  $\mathbf{P}(0) = 0$ .

Необходимо найти рекуррентный алгоритм фильтра Калмана–Бьюси для определения оценок положения и скорости движения тела.

Матрица коэффициентов усиления фильтра

$$\mathbf{F}(k) = \begin{pmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \end{pmatrix},$$

поэтому рекуррентный алгоритм вычисления оценок вектора состояния принимает вид:

$$\begin{aligned} x_1^*(k+1) &= x_1^*(k) + x_2^*(k), \\ x_2^*(k+1) &= x_2^*(k); \quad \mathbf{x}^*(0) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(k) &= (1 - f_1(k))x_1^*(k) + f_1(k)y(k); \\ \hat{x}_2(k) &= -f_2(k)x_1^*(k) + x_2^*(k) + f_2(k)y(k).\end{aligned}$$

На первом шаге находим, что

$$\mathbf{P}^*(1) = \mathbf{R}_\alpha(\mathbf{C}\mathbf{P}^*(k)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_\beta)^{-1} = 0,75,$$

поэтому определяем, что  $\mathbf{F}(1) = 0,75R_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , значит

$$f_1(1) = 0,250, \quad f_2(1) = 0,375.$$

На этом основании находим оценку вектора состояния системы на первом шаге

$$x_1(1) = 0,250y(1), \quad x_2(1) = 0,375y(1).$$

На втором шаге находим, что

$$\mathbf{P}^*(2) = \begin{pmatrix} 2,145 & 1,687 \\ 1,687 & 1,812 \end{pmatrix},$$

затем определяем, что  $\mathbf{F}(2) = \begin{pmatrix} 0,682 \\ 0,536 \end{pmatrix}$  и, наконец, находим оценку вектора состояния системы:

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(2) &= 0,199y(1) + 0,682y(2); \\ \hat{x}_2(2) &= 0,040y(1) + 0,536y(2).\end{aligned}$$

Далее, находя значения элементов матрицы  $\mathbf{P}^*(k)$ ;  $\mathbf{F}(k)$ ,  $k = 3, 4, \dots$ , обнаруживаем, что решение стабилизировалось на шестом шаге:

$$\mathbf{P}^*(6) = \mathbf{P}^*(7), \quad \mathbf{F}(6) = \mathbf{F}(7).$$

Вычисления оценок следует остановить: значение среднеквадратической ошибки измерения положения составило  $\mathbb{M}\varepsilon_1^2(6) = 0,757$ , и скорости  $\mathbb{M}\varepsilon_2^2(6) = 1,03$ .

**2.** Пусть в системе первого порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x(t) + \alpha(t); \quad \mathbb{M}x(0) = 0, \\ y(t) &= x(t) + \beta(t)\end{aligned}$$

наблюдается сигнал, который представляется суммой полезного сигнала и помехи  $\beta(t)$ . На вход системы действует случайное возмущение  $\alpha(t)$ . Помеха измерений и входное возмущение являются случайными процессами типа белый шум интенсивности  $R_\beta = 1$ ,  $R_\alpha = 2$  соответственно.

Синтезировать непрерывный фильтр Калмана-Бьюси для вычисления несмещенной оценки состояния  $\hat{x}(t)$  системы. Параметры системы таковы:  $A = -1$ ;  $C = 1$ ,  $R_\alpha = 2$ ;  $R_\beta = 1$ , поэтому модель фильтра описывает уравнение

$$\dot{\hat{x}}(t) = -\hat{x}(t) + F(t)(y(t) - \hat{x}(t)), \quad \hat{x}(0) = 0,$$

где  $F(t) = P(t)$ .

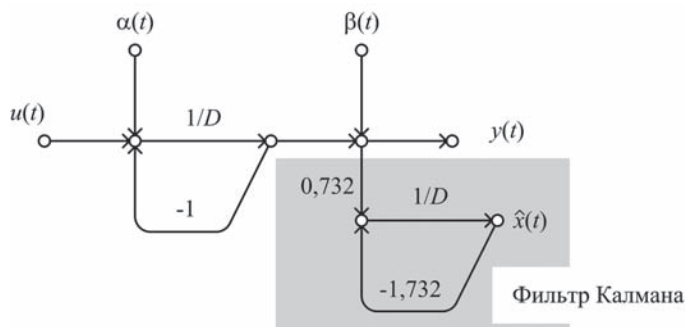


Рис. 13.3

Структура непрерывного фильтра Калмана–Бьюси

Дифференциальное уравнение Риккати для функции  $P(t)$  принимает вид

$$\dot{P}(t) = -2P(t) - P^2(t) + 2.$$

Стационарное значение функции  $P(t)$  удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\tilde{P}^2 + 2\tilde{P} - 2 = 0,$$

откуда находим, что  $\tilde{P} = 0,732$ .

Искомая модель фильтра Калмана–Бьюси принимает вид

$$\dot{\hat{x}}(t) = -1,732\hat{x}(t) + 0,732y(t).$$

Структура фильтра показана на рис.13.3.

### 13.5. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ

**Задача идентификации** динамической системы состоит в получении или уточнении математической модели системы по данным, полученным из эксперимента. В общем случае задача идентификации ставится так: для множества сигналов, полученных из эксперимента над системой, необходимо определить математическую модель из заданного класса моделей, которая в известном смысле наилучшим образом аппроксимирует движения реальной системы.

Процедуру идентификации можно представить состоящей из четырех этапов:

- планирование эксперимента;
- определение структуры модели;
- определение параметров модели;
- верификация найденной модели.

Эксперименты с динамическими системами сложны, ответственны и строят достаточно дорого. Существуют специальные математические методы планирования эксперимента, позволяющие найти рациональную схему и число экспериментов.

Выбор структуры модели осуществляют на основе априорных знаний о системе. Модель может быть выбрана внешней типа *вход-выход* или внутренней в терминах пространства состояний.

Оценивание параметров модели осуществляют на основе применения математических методов оптимизации к выбранному критерию аппроксимации экспериментальных данных.

Верификацию модели, с найденными оценками параметров, проводят путем сравнения реакции модели и реальной системы на общие входные воздействия. Исследуются разности реакций и чувствительность этих разностей к изменениям параметров модели.

Задача параметрической идентификации имеет место тогда, когда идентифицируемая модель системы известна с точностью до значения параметров.

Классическими методами решения задачи параметрической идентификации линейных стационарных систем являются методы анализа частотных и временных характеристик, методы спектральных и корреляционных функций и, наконец, методы, основанные на принципе *наименьших квадратов К. Гаусса* (*K. Gauss*, 1809).

Формализуем задачу идентификации и используем метод наименьших квадратов для ее решения.

Предположим, что модель динамической системы известна с точностью до параметров, а это означает, что известно множество возможных моделей системы, параметризованное вектором

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T.$$

Таким образом, определение модели системы сводится к задаче оценивания вектора параметров  $\theta$ .

Пусть в результате эксперимента над динамической системой получены данные:

$$\{u_j = u(t_j), y_j = y(t_j), j = 1, 2, \dots, N\}, \quad (13.38)$$

которые определяют состояние входа и выхода системы в синхронные моменты времени. Располагая синхронными парами  $\{(u_j, y_j)\}$ , необходимо найти такие оценки параметра  $\hat{\theta}$ , при которых выходные координаты полностью определенной модели системы

$$\{y(t_j; \theta), j = 1, 2, \dots, N\}$$

были достаточно близки к имеющимся экспериментальным данным. Близость этих данных будем измерять значением критерия  $J(\epsilon; \theta)$ , зависящей от ошибки оценивания

$$\epsilon(t_j; \theta) = y(t_j) - y(t_j; \theta) \quad (13.39)$$

и параметров.

Лучшей моделью из множества возможных будет та, у которой значение критерия будет наименьшей.

Выходные данные модели системы находятся в виде линейной формы от оцениваемых параметров

$$y(t; \theta) = \varphi^T(u(t))\theta = \sum_j \varphi_j(u)\theta_j, \quad (13.40)$$

где  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))^T$  — известная вектор-функция;  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$  — вектор искомых параметров.

Координаты вектора ошибки оценивания  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)^T$ , ищем из выражения

$$\varepsilon_j = \varepsilon(t_j; \theta) = y_j - \varphi^T(t_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Критерий точности оценок, или меру правильности, выбранной модели зададим в виде квадратичной формы

$$J(\varepsilon; \theta) = 0,5\varepsilon^T \varepsilon.$$

Введем в рассмотрение два вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= (y_1, y_2, \dots, y_N)^T; \\ \varphi(t_j) &= (\varphi_1(t_j), \varphi_2(t_j), \dots, \varphi_n(t_j))^T, \quad j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (13.41)$$

и матрицу

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots & \varphi_n(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \dots & \varphi_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(t_N) & \varphi_2(t_N) & \dots & \varphi_n(t_N) \end{pmatrix}. \quad (13.42)$$

Теперь выражения для вычисления выхода модели системы и ошибки оценки в матричной форме принимают вид

$$\mathbf{y}, \varepsilon = \mathbf{y} - \Phi\theta. \quad (13.43)$$

Задача идентификации параметров модели системы состоит в том, чтобы найти такое значение параметра  $\theta$ , при котором реакция выбранной модели системы максимально близко совпадает с реакцией реальной системы на один и тот же входной сигнал:

$$J(\varepsilon; \theta) = 0,5\varepsilon^T \varepsilon \rightarrow \min_{\theta}.$$

Найдем решение этой задачи оптимизации, для чего преобразуем выражение критерия

$$\begin{aligned} 2J(\varepsilon; \theta) &= (\mathbf{y} - \Phi\theta)^T (\mathbf{y} - \Phi\theta) = \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \Phi\theta - (\Phi\theta)^T \mathbf{y} + (\Phi\theta)^T (\Phi\theta) = \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} + \theta^T \Phi^T \Phi + \theta^T (\Phi^T \mathbf{y}) + (-\Phi^T \mathbf{y})^T \theta. \end{aligned}$$

Обозначив в этом выражении  $-\Phi^T \mathbf{y} = \mathbf{z}$ ,  $\Phi^T \Phi = \mathbf{S}$ , получим

$$2J(\varepsilon; \theta) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} + (\theta^T \mathbf{S}\theta + \theta^T \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \theta) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} + J_1(\theta). \quad (13.44)$$

Очевидно, что критерий  $J(\varepsilon; \theta)$  достигает своего минимального значения вместе с выражением, стоящим в скобках и обозначенное  $J_1(\theta)$ , поскольку скалярный квадрат  $\mathbf{y}^T \mathbf{y}$  неотрицателен.

Дополним до полного квадрата часть выражения  $J_1(\theta)$

$$\begin{aligned} J_1(\theta) &= \theta^T \mathbf{S} \theta + \theta^T \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \theta + (\mathbf{z}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z}) = \\ &= (\theta + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z})^T \mathbf{S} (\theta + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z}) - \mathbf{z}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Поскольку матрица  $\mathbf{S} = \Phi^T \Phi$  является положительно определенной и симметрической, то квадратичная форма  $-\mathbf{z}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z}$  также оказывается положительно определенной, но тогда минимум  $J_1(\theta)$  будет достигаться при  $\theta + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z} = 0$ , что возможно, когда  $\hat{\theta}^* = -\mathbf{S}^{-1} \mathbf{z}$ .

Таким образом, искомая оптимальная оценка вектора параметров  $\theta^*$  удовлетворяет соотношению

$$\hat{\theta}^* = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y}. \quad (13.45)$$

Найденное соотношение можно применять для решения задачи параметрической идентификации при использовании как внутренней так и внешней модели системы.

### Примеры:

**1.** Идентифицировать динамическую систему, для которой предполагается в качестве математической модели выбрать модель из двухпараметрического множества внешних моделей первого порядка:

$$W(s; k, T) = \frac{k}{Ts + 1}; \quad \theta = \begin{pmatrix} k \\ T \end{pmatrix}.$$

Экспериментальные данные реальной системы представляют собой две последовательности

$$\{y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)\}; \quad \{u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_N)\}.$$

Выходная переменная модели предполагается линейной формой от параметров

$$\hat{y}(t_j) = -T y(t_{j-1}) + k u(t_{j-1}), \quad j = 2, 3, \dots, N$$

или в матричной записи

$$\begin{aligned} y(t_j) &= \varphi^T(t_j) \theta, \\ \varphi(t_j) &= \begin{pmatrix} -y(t_{j-1}) \\ u(t_{j-1}) \end{pmatrix}, \quad j = 2, 3, \dots, N. \end{aligned}$$

Ошибка оценивания определяется разностью  $\varepsilon(t_j) = y(t_j) - \hat{y}(t_j)$ , а критерий точности

$$J(\varepsilon; \theta) = 0,5 \varepsilon^T \varepsilon = 0,5 \sum_j \varepsilon^2(t_j), \quad j = 2, 3, \dots, N.$$

Векторы выходных данных и ошибок оценивания принимают вид:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} &= (\hat{y}(t_2), \hat{y}(t_3), \dots, \hat{y}(t_N))^T, \\ \varepsilon &= (\varepsilon(t_2), \varepsilon(t_3), \dots, \varepsilon(t_N))^T. \end{aligned}$$



Искомый вектор параметров находим из выражения

$$\hat{\theta}^* = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y,$$

где

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi(t_1) \\ \varphi(t_2) \\ \vdots \\ \varphi(t_{N-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t_1) & u(t_1) \\ -y(t_2) & u(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ -y(t_{N-1}) & u(t_{N-1}) \end{pmatrix};$$

$$\Phi^T \Phi = \begin{pmatrix} \sum_j y^2(t_j) & -\sum_j y(t_j)u(t_j) \\ -\sum_j y(t_j)u(t_j) & \sum_j u^2(t_j) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$\Phi^T y = \begin{pmatrix} -\sum_j y(t_j)y(t_{j+1}) \\ -\sum_j y(t_{j+1})u(t_j) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

**2.** Идентифицировать динамическую систему, для которой предполагается в качестве математической модели выбрать модель из  $2n$ -параметрического множества внешних моделей  $n$ -го порядка:

$$W(s; \alpha, \beta) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_n};$$

$$\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^T.$$

Экспериментальные данные реальной системы представляют собой последовательности входных и выходных данных:

$$\{y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)\}; \quad \{u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_N)\}.$$

Функции

$$\varphi(t_{j+1}) = (-y(t_j), -y(t_{j-1}), \dots, -y(t_{j-n+1}), u(t_j), u(t_{j-1}), \dots, u(t_{j-n+1}))^T,$$

поэтому

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi(t_{n+1}) \\ \varphi(t_{n+2}) \\ \vdots \\ \varphi(t_N) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -y(t_n) & -y(t_{n-1}) & \dots & -y(t_1) & u(t_n) & \dots & u(t_1) \\ -y(t_{n+1}) & -y(t_n) & \dots & -y(t_2) & u(t_{n+1}) & \dots & u(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y(t_{N-1}) & -y(t_{N-2}) & \dots & -y(t_{N-n}) & u(t_{N-1}) & \dots & u(t_{N-n}) \end{pmatrix},$$

что позволяет определить искомый вектор параметров.

Параметрический метод идентификации может быть существенно улучшен, если находить оценки параметрам системы по мере поступления результатов эксперимента, не дожидаясь окончания всего эксперимента. Такие методы называют *рекурсивными методами идентификации*.

Если  $\hat{\theta}(N)$  — среднеквадратичная оценка параметров, полученная для  $N$  наблюдений и матрица  $\Phi^T(N)\Phi(N)$  не вырождена и положительно определена, то

$$\hat{\theta}(N+1) = \hat{\theta}(N) + K(N)(y(k+1) - \varphi(N+1))\hat{\theta}(N),$$

где

$$\begin{aligned} K(N) &= P(N+1)\varphi^T(N+1) = \\ &= P(N)\varphi^T(N+1)[E + \varphi(N+1)P(N)\varphi^T(N+1)]^{-1}; \\ P(N+1) &= 1 - K(N)\varphi(N+1)P(N). \end{aligned}$$

### 13.6. УПРАЖНЕНИЯ

1. Осуществить синтез замкнутой системы стабилизации, если ее внутренняя модель представлена уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu(t),$$

где  $\mu(t)$  — белый шум интенсивности  $4 \text{ с}^2$ , и минимизировать критерий качества управления

$$\mathbb{M} \int_0^{\infty} (x_1^2(t) + 25u^2(t)) dt.$$

Начальное смещение  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Определить реакцию замкнутой системы на это смещение.

2. Для системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,8 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \beta(t),$$

где  $\beta(t)$  — шум с автокорреляционной функцией

$$R_{\beta}(\tau) = 40e^{-0,2|\tau|},$$

найти управление наилучшее в смысле:

- $\mathbb{M} \int_0^{\infty} (x_1^2(t) + 0,01u^2(t)) dt;$
- $\mathbb{M} \int_0^{\infty} (x_1^2(t) + 100u^2(t)) dt.$

**3.** Синтезировать фильтр Винера для выделения полезного сигнала  $u(t)$  на фоне значительно более мощного белого шума  $\mu(t)$ , если известна спектральная плотность полезного сигнала.

**4.** Осуществить фильтрацию стохастического входного сигнала  $u(t)$  на фоне аддитивной помехи  $\beta(t)$ , используя фильтр Винера, если:

- $S_u(\omega) = \frac{16}{\omega^2 + 16}$ ;  $S_\beta(\omega) = 0, 1$ ;
- $S_u(\omega) = \frac{4}{\omega^2 + 4}$ ;  $S_\beta(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + 4}$ ;
- $S_u(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}$ ;  $S_\beta(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}$ .

Найти значение минимального среднего квадрата ошибки воспроизведения входного сигнала.

**5.** На вход линейного звена  $\dot{x}(t) = -4x(t) + \mu(t)$  воздействует белый шум  $\mu(t)$  интенсивности  $a^2$ .

Производят измерения выходной переменной звена. Измерения  $z(t) = x(t) + \beta(t)$  содержат аддитивную помеху  $\beta(t)$ , которую рассматривают как независимый от входа белый шум интенсивности  $b^2$ .

Синтезировать фильтр Калмана–Бьюси для получения наилучшей в смысле минимума среднего квадрата ошибки оценки сигнала  $x(t)$ .

**6.** На систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -4x_1(t) - 4x_2(t) + \mu(t)\end{aligned}$$

воздействует белый шум интенсивности  $a^2$ .

Производят измерения сигнала  $x_2(t)$ . Измерения  $z(t) = x(t) + \beta(t)$  содержат помеху  $\beta(t)$ , которую рассматривают как независимый от входа белый шум интенсивности  $b^2$ .

Составить уравнение Риккати и осуществить синтез стационарного фильтра Калмана–Бьюси.

**7.** Наблюдаемый стохастический сигнал представлен в виде суммы  $z(t) = x(t) + \beta(t)$  полезного сигнала  $x(t)$  и помехи в виде белого шума  $\beta(t)$ . Спектральные плотности этих случайных процессов равны:

$$S_u(\omega) = \frac{2}{\omega^2 + 1}, \quad S_\beta(\omega) = 1.$$

Выполнить процедуры синтеза фильтров Винера и Калмана–Бьюси.

Показать, что передаточная функция фильтра Винера имеет вид

$$W(s) = \frac{0,422}{0,578s + 1},$$

а структура фильтра Калмана–Бьюси определяется уравнением:

$$\dot{\hat{x}}(t) = -1,73\hat{x}(t) + 0,73z(t).$$

Убедиться в том, что результаты совпадают.

8. Показать, что фильтр Калмана для дискретной системы

$$\begin{aligned}x(k+1) &= -0,6x(k) + \mu(k), \\y(k) &= 1,4x(k) + \mu(k), \quad k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

имеет структуру, которую описывает уравнение

$$\hat{x}(k+1|k) = -0,8\hat{x}(k|k-1) - y(k).$$

9. Для системы

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1 \end{pmatrix} \mu(t); \\y(k) &= x_2(k); \\ \mathbf{x}(0) &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

где  $\mu(k)$  — белый шум интенсивности  $0,2 \text{ с}^2$ .

Найти, располагая значениями  $y(k)$ , наилучшую в смысле среднего квадрата оценку состояния системы на шаге  $k = 3$ .

10. Рассмотреть объект с моделью

$$y(k) - ay(k-1) = bu(k-1) + \beta(k),$$

где  $a = 0,855$ ;  $b = 1,2$ ;  $\beta(k)$  — случайный процесс с единичной дисперсией;  $u(k)$  — последовательность псевдослучайных двоичных импульсов единичной амплитуды.

Выполнить рекурсивную идентификацию системы, для чего следует найти, используя рекурсивный алгоритм, оценки параметров  $a$ ,  $b$ . Начальные значения параметров  $a_0 = b_0 = 0$  и  $P(0) = 10$ .

**Часть IV**

**ОПТИМАЛЬНЫЕ  
И АДАПТИВНЫЕ  
СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ**



## СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ЗАДАННОМУ КРИТЕРИЮ

- Задачи оптимального управления
- Алгоритм принципа максимума
- Метод динамического программирования
- Системы оптимальные по квадратичному критерию
- Системы оптимальные по быстродействию
- Субоптимальные системы и системы с переменной структурой
- Упражнения

### 14.1. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

**Определение.** Для системы

$$\Sigma^{(n)}: \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t); \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \quad (14.1)$$

задача оптимального управления состоит в том, чтобы с помощью допустимого управления  $\mathbf{u}(t) \in U^m$  изменить состояние этой системы, переводя ее из начального  $\mathbf{x}^0$  состояния в некоторое конечное  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^*$  состояние, расположенное в целевом множестве  $X^n$ , так, чтобы критерий качества управления  $J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  принял минимально возможное значение.

При этом найденное управление  $\mathbf{u}^*(t)$  называют **оптимальным управлением**, и траекторию движения системы  $\mathbf{x}^*(t)$ , соответствующую этому управлению — **оптимальной траекторией**. Время движения  $T$  может быть свободным или фиксированным.

Выбор критерия качества управления не является формальным актом, критерий не предписывается какой-либо теорией, он полностью определяется содержанием задачи управления. Часто **критерий оптимальности** принимают в виде функционала

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{x}, T) = \Phi(\mathbf{x}(T), T) + \int_0^T \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt, \quad (14.2)$$

где  $\Phi(\mathbf{x}(T), T)$  — **терминальный функционал**, характеризующий качество управления на момент достижения цели или на момент окончания движения;  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  — **целевая функция**, определяющая интегральный функционал.

Вид критерия  $J(\mathbf{u}, \mathbf{x}, T)$  задает класс задач оптимальности.

Так, например:

- задача оптимального быстродействия имеет место тогда, когда

$$\Phi(\mathbf{x}(T), T) \equiv 0, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \equiv 1; \quad (14.3)$$

- задача предельной точности —

$$\Phi(\mathbf{x}(T), T) \equiv 0, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{x}(t); \quad (14.4)$$

- задача минимума энергии —

$$\Phi(\mathbf{x}(T), T) \equiv 0, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t); \quad (14.5)$$

- задача минимума расхода —

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{Q}|\mathbf{u}(t)|; \quad (14.6)$$

- задача предельного компромисса точности и энергии —

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{u}(t); \quad (14.7)$$

- задача терминального управления —

$$\Phi(\mathbf{x}(T), T) \neq 0, \quad \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv 0. \quad (14.8)$$

Задачи, для которых

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{x}, T) = \int_0^T \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt, \quad (14.9)$$

называют задачами оптимального управления в форме Лагранжа.

Задачи общего вида, когда

$$\Phi(\mathbf{x}(T), T) \neq 0, \quad \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \neq 0, \quad (14.10)$$

называют задачами в форме Больца.

Терминальные задачи, когда

$$\Phi(\mathbf{x}(T), T) \neq 0, \quad \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv 0, \quad (14.11)$$

называют задачами в форме Майера.

Задачи оптимального управления является задачами минимизации на множестве функций. В некоторых случаях эта задачи могут быть решены методами классического вариационного исчисления. Однако чаще всего задачи оптимального управления ставятся как задачи минимизации при ограничениях на состояния или функцию управления. Для таких задач эффективными методами являются методы неклассического вариационного исчисления, к которым относятся принцип максимума Л. С. Понтрягина, метод динамического программирования Р. Беллмана, метод моментов Н. Н. Красовского и другие методы.



Простейший класс задач *оптимизации функций* состоит в отыскании не стесненного никакими ограничениями вектора  $\mathbf{x}$ , который минимизирует скалярную функцию векторного аргумента  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in R^n} . \quad (14.12)$$

Достаточными условиями решения такой задачи является условие

$$\text{grad}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad (14.13)$$

и положительная определенность матрицы Гессе этой функции

$$H(\mathbf{F}(\mathbf{x})) = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (14.14)$$

Более общий класс задач оптимизации составляют задачи *оптимизации функций с ограничениями*, когда необходимо найти вектор  $\mathbf{x}$ , который минимизирует функцию  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  и при этом удовлетворяет функциональному соотношению, например,  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0$ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \rightarrow \min_{\mathbf{G}(\mathbf{x})=0} . \quad (14.15)$$

Для решения таких задач используют *метод множителей Лагранжа*.

Необходимые условия минимизации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \lambda) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} L(\mathbf{x}, \lambda) &= 0, \end{aligned} \quad (14.16)$$

где  $L(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{G}(\mathbf{x})$  — функция Лагранжа;  $\lambda$  — вектор множителей Лагранжа.

Задачи оптимизации без ограничений и с ограничениями в форме равенств называют *классическими*. Неклассические задачи оптимизации редко могут быть решены аналитически.

Основные методы их решения используют *алгоритмы Куна–Таккера*, градиентные методы, симплексные алгоритмы и методы прямого поиска.

Экстремальные задачи, в которых неизвестными являются функции, называют задачами *оптимизации функционалов*. Эти задачи решаются методами *вариационного исчисления*, основу которых составляют классические *методы Эйлера, Гамильтона, принцип максимума Понтрягина и метод динамического программирования Беллмана*.

**Задача оптимизации функционала без ограничений** имеет вид

$$J(\mathbf{x}) = \int_0^T \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt \rightarrow \min_{\mathbf{x}(t) \in C_1} , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^*. \quad (14.17)$$

Найти на множестве  $C_1$  — всех непрерывно дифференцируемых функций такую функцию  $\mathbf{x}(t)$ , которая удовлетворяет граничным условиям

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^*$$

и минимизирует функционал  $J(\mathbf{x})$ .

Необходимыми условиями минимизации являются *дифференциальные уравнения Эйлера–Лагранжа*

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \right) = 0. \quad (14.18)$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа принимают более простые представления, когда целевая функция  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$  имеет частный вид, если:

- $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ , то

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = 0; \quad (14.19)$$

- $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{F}(\dot{\mathbf{x}}, t)$ , то

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \mathbf{F}(\dot{\mathbf{x}}, t) = \text{const}; \quad (14.20)$$

- $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ , то

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \dot{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \text{const}. \quad (14.21)$$

В отличие от задач минимизации функций, когда необходимые условия представляют собой алгебраические уравнения, необходимые условия минимизации функционалов — это дифференциальные уравнения относительно неизвестной функции.

Задачи оптимального управления динамическими системами являются **задачами минимизации функционала с ограничениями**, которые накладываются на переменные состояния и управление. Эти ограничения задаются в виде:

$$\mathbf{x}(t) \in X^n, \mathbf{u}(t) \in U^m; t \in [t_0, T], \quad (14.22)$$

и уравнения движения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t). \quad (14.23)$$

Формально задача ставится так:

*найти в множестве допустимых управлений  $U^m$ , такой вектор управления  $\mathbf{u}(t)$ , при котором динамическая система (14.23), начиная свое движение из состояния  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(0)$ , приходит в состояние  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(T)$  так, что критерий движения  $J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = J(\mathbf{x}(T, t_0))$  принимает экстремальное значение.*

Для решения некоторых частных задач этого класса используется метод множителей Лагранжа, в котором предполагается использование вспомогательного функционала

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}), \quad (14.24)$$

где  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  — переменный во времени вектор множителей Лагранжа.

Необходимые условия минимизации интегрального функционала имеют вид уравнений Эйлера–Лагранжа относительно вспомогательного функционала  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda)$ .

В общем случае задачи оптимального управления решают методами, среди которых основными являются: принцип максимума Понтрягина и метод динамического программирования Беллмана.

### Примеры:

1. Найти решение задачи

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in R^2}.$$

Функция  $F(x_1, x_2)$  имеет одну стационарную точку  $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , поскольку система алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} F(x_1, x_2) &= 2x_1 - 2x_2 = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x_2} F(x_1, x_2) &= -2x_1 + 8x_2 = 0 \end{aligned}$$

имеет единственное решение. Матрица Гессе функции  $F(x_1, x_2)$

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

имеет два положительных угловых минора и поэтому является положительно определенной. Достаточные условия минимума в точке  $\mathbf{x}^*$  выполнены.

2. Найти стационарные точки в задаче

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= 0,5(x_1^2 + 4x_2^2) \rightarrow \min_{G(x_1, x_2)=0}; \\ G(x_1, x_2) &= x_1 + 2x_2 - 1. \end{aligned}$$

Составим функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = 0,5(x_1^2 + 4x_2^2) + \lambda(x_1 + 2x_2 - 1).$$

Необходимые условия минимума принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} L(\mathbf{x}, \lambda) &= x_1 + \lambda = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x_2} L(\mathbf{x}, \lambda) &= 4x_2 + 2\lambda = 0; \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} L(\mathbf{x}, \lambda) &= x_1 + 2x_2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Эти три алгебраических уравнения с тремя неизвестными имеют единственное решение  $\lambda^* = -0,5$ ;  $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \end{pmatrix}$ .

3. Найти решение задачи

$$e^{x_1 x_2} \rightarrow \max_{G(x_1, x_2)=0};$$

$$G(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1.$$

Составляем функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = e^{x_1 x_2} + \lambda(x_1 + x_2 - 1).$$

Для нее необходимые условия принимают вид

$$\begin{aligned} x_2 e^{x_1 x_2} &= 0; \\ x_1 e^{x_1 x_2} &= 0; \\ x_1 + x_2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим решение

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

4. Найти диаграмму тока, при котором имеет место минимум потерь в якорной цепи электродвигателя при разгоне за время  $T$  со скорости  $\omega_0$  до  $\omega_1$  при постоянном моменте сопротивления  $M_c$ .

Количество тепла, выделяющегося в якорной обмотке электродвигателя за время разгона, определяет интеграл от квадрата тока. Воспользуемся внешним уравнением

$$G \frac{d\omega}{dt} = ki(t) - M_c$$

электропривода с известным приведенным моментом инерции  $G$ , чтобы составить функционал пропорциональный тепловым потерям в якорной цепи

$$J(\omega(t)) = \int_0^T \left( \dot{\omega}(t) + \frac{M_c}{G} \right)^2 dt.$$

Найдем составляющие необходимых условий минимума в форме уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left( \dot{\omega} + \frac{M_c}{G} \right)^2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{\omega}} \left( \dot{\omega} + \frac{M_c}{G} \right)^2 = 2 \left( \dot{\omega} + \frac{M_c}{G} \right).$$

Искомое уравнение принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\omega}} \left( \dot{\omega} + \frac{M_c}{G} \right)^2 = \ddot{\omega}(t) = 0$$

с граничными условиями  $\omega(0) = 0$ ,  $\omega(T) = 1$ .

Решение этой двухточечной краевой задачи

$$\omega(t) = C_1 t + C_2$$

найдем после определения двух постоянных:

$$\omega(0) = C_2 = 0, \quad \omega(T) = C_1 T + C_2 = \omega_1.$$

Следовательно,

$$C_1 = \frac{\omega_1 - \omega_0}{T}, \quad C_2 = 0$$

и поэтому частота вращения двигателя должна изменяться линейно

$$\omega^*(t) = \frac{\omega_1 - \omega_0}{T} t + \omega_0.$$

При этом искомая диаграмма тока

$$i^*(t) = G \frac{\omega_1 - \omega_0}{kT} + \frac{M_c}{k} = \text{const}.$$

Для обеспечения минимальных тепловых потерь ток в якорной цепи электродвигателя должен быть неизменным.

**5.** Пусть динамическая система, имеющая модель состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t) \end{aligned}$$

характеризуется интегральным показателем качества

$$J = \int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + 0,1u^2(t)) dt.$$

Найти управление, которое переводило бы эту систему из состояния  $x(0)$  в состояние  $x(\infty) = 0$  так, чтобы минимизировать показатель качества. Составим вспомогательный функционал Лагранжа

$$L(x_1, x_2, u, \lambda_1, \lambda_2) = (x_1^2 + x_2^2 + 0,1u^2) + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_1) + \lambda_2(-x_1 + u - \dot{x}_2).$$

Полная система дифференциальных уравнений для определения неизвестных  $x_1, x_2, u, \lambda_1, \lambda_2$  принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t); \\ \dot{\lambda}_1(t) &= \lambda_2(t) + 2x_1(t); \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\lambda_1(t) + 2x_2(t); \\ u(t) &= 2\lambda_2(t). \end{aligned}$$

После исключения переменной  $u$  из первого уравнения, имеем систему из четырех линейных дифференциальных однородных уравнений относительно четырех неизвестных  $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ . Характеристическое уравнение этой системы

$$\mu^4 - 8\mu^2 + 11 = 0$$

имеет корни  $\mu_{1,2} = \pm 2,5$ ;  $\mu_{3,4} = \pm 1,7$ .

Поэтому

$$x_1(t) = C_1 e^{-2,5t} + C_2 e^{-1,7t} + C_3 e^{2,5t} + C_4 e^{1,7t}.$$

Воспользуемся граничными условиями для определения постоянных.

Для того чтобы состояние  $x(\infty) = 0$  необходимо, чтобы  $C_3 = C_4 = 0$ , поэтому

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^{-2,5t} + C_2 e^{-1,7t}; \\ x_2(t) &= -2,5C_1 e^{-2,5t} - 1,7C_2 e^{-1,7t}. \end{aligned}$$

Кроме того, находим, что

$$C_1 e^{-2,5t} = -0,125(1,7x_1 + x_2), \quad C_2 e^{-1,7t} = 0,125(2,5x_1 + x_2).$$

Теперь можно найти искомое управление

$$u(t) = \dot{x}_2(t) + x_1(t) = 7,25C_1 e^{-2,5t} + 3,89C_2 e^{-1,7t} = -3,25x_1(t) - 4,2x_2(t).$$

## 14.2. АЛГОРИТМ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

*Принцип максимума* был постулирован Л. С. Понтрягиным в виде единого метода, позволяющего решать самые разнообразные задачи оптимального управления. Методологию принципа покажем на примере частной задачи оптимального управления — задаче Лагранжа с известной целью движения, но свободным временем.

Перевести систему

$$\Sigma^{(n)}: \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$$

с помощью  $u(t) \in U^m$  — допустимого управления из исходного состояния в заданную точку  $x(T) = x^*$  так, чтобы функционал качества

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^T \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad (14.25)$$

достиг минимума. Время движения не фиксировано.

Рассмотрим, следуя методу, вспомогательный вектор состояния

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad (14.26)$$

который определяет система уравнений

$$\frac{d}{dt}\tilde{\psi}_0 = 0; \quad \frac{d}{dt}\psi = -(\text{grad}f(\mathbf{x}, \mathbf{u}))^T \psi. \quad (14.27)$$

Обе системы, основную и вспомогательную, можно объединить с использованием **функции Гамильтона**:

$$H(\psi_0, \psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \psi_0 \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \psi^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (14.28)$$

В самом деле

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \psi}; \\ \dot{\psi} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (14.29)$$

Для данной задачи принцип максимума определяет необходимое условие оптимальности управления. Это условие формулирует теорема, которую приводим без доказательства.

**Теорема** (Л. С. Понтрягин, 1956). *Для того чтобы допустимое управление  $\mathbf{u}^*(t)$  и соответствующая ему траектория  $\mathbf{x}^*(t)$  были оптимальными для данной задачи, необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции  $\begin{pmatrix} \psi_0^* \\ \psi^* \end{pmatrix}$ , отвечающей  $\mathbf{u}^*(t)$  и  $\mathbf{x}^*(t)$ , что:*

- в любой момент времени, когда  $\mathbf{u}^*(t)$  — непрерывна, функция  $H^*(\psi_0^*, \psi^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u})$  принимает на  $\mathbf{u}^*(t)$  максимальное значение

$$H^*(\psi^*, \mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{u}(t) \in U^m} H^*(\psi_0^*, \psi^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}); \quad (14.30)$$

- в любой момент времени

$$\psi_0^* = -1; \quad H^*(\psi^*(t), \mathbf{x}^*(t)) = 0. \quad (14.31)$$

Теорема определяет необходимые условия для оптимального управления и представлена в конструктивной форме, что позволяет построить алгоритмическую процедуру определения оптимального управления.

Так для задачи оптимального управления в форме Лагранжа с закрепленными концами и свободным временем движения необходимо:

1°. Составить гамильтониан системы

$$H(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \psi^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (14.32)$$

2°. Максимизировать гамильтониан по  $\mathbf{u}(t) \in U^m$ :

$$H(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \rightarrow \max_{\mathbf{u} \in U^m} \quad (14.33)$$

при этом определить управление как функцию вектора состояния и вспомогательной переменной

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}(\psi^*, \mathbf{x}^*). \quad (14.34)$$

3°. Составить систему однородных дифференциальных уравнений для вспомогательной переменной

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} H(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*). \quad (14.35)$$

4°. Для определения оптимального управления  $\mathbf{u}^*$  как функции времени необходимо решить систему уравнений  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$  с начальными условиями  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$  и систему однородных дифференциальных уравнений относительно вспомогательной переменной, но для этого недостает начальных условий вектора  $\psi(0)$ , которые неизвестны.

Тем не менее в задаче с фиксированными концами известны два крайних значения вектора состояния системы  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ ,  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^*$ , что позволяет, используя численные методы, найти искомое решение такой *двухточечной краевой задачи*.

Для задачи с подвижными концами вместо граничных условий добавляют **условие трансверсальности**.

Так, если имеет место задача с подвижным правым концом — движение должно завершиться на многообразии  $M(\mathbf{x})$  размерности  $r$ , то условие трансверсальности состоит в том, чтобы вектор  $\psi(T)$ , был ортогонален в точке  $\mathbf{x}^*(T)$  касательной плоскости к многообразию  $M(\mathbf{x})$ . Это означает, что для любого вектора  $\mathbf{z}$  из этой касательной плоскости выполняется соотношение ортогональности

$$\psi^T(T)\mathbf{z} = 0. \quad (14.36)$$

Условие трансверсальности позволяет составить  $r$  независимых соотношений относительно недостающих координат правого конца оптимальной траектории.

### Примеры:

#### 1. Задача максимального быстродействия.

Систему

$$\Sigma_0^{(2)}: \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} u(t), \quad \mathbf{x}(0)$$

максимально быстро перевести из известного состояния  $x^0$  в начало координат с помощью ограниченного управления  $\mathbf{u}(t) \in U^m = [-1, 1]$ .

1°. Составим гамильтониан системы для данной задачи

$$H(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = -1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

2°. Максимум этого выражения по  $u$  при условии  $|u| \leq 1$  будет иметь место тогда, когда  $u^*(t) = \text{sgn } \psi_2(t)$ .

3°. Вектор вспомогательных переменных удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= \psi_1, \end{aligned}$$

поэтому  $\psi_2(t) = \beta - \alpha t$ , где  $\alpha, \beta$  — постоянные.



Оптимальное управление

$$u^*(t) = \operatorname{sgn} \psi_2(t)$$

оказывается кусочно-постоянной функцией, которая принимает не более чем два значения, и которая может менять знак не более чем один раз.

**2. Задача управления с минимумом расхода.**

Систему  $\Sigma_0^{(2)}$  перевести из известного состояния  $x^0$  в начало координат с помощью ограниченного управления

$$u(t) \in U^m = [-1, 1]$$

так, чтобы минимизировать функционал

$$J(u) = \int_0^{\infty} |u(t)| dt.$$

1°. Гамильтониан системы для данной задачи принимает вид

$$H(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = -|u| + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

2°. Максимум этого выражения по  $u$  при условии  $|u| \leq 1$  будет иметь место тогда, когда

$$u^*(t) = \operatorname{dez} \psi_2(t) = \begin{cases} 0, & |\psi_2| \leq 1; \\ \operatorname{sgn} \psi_2(t), & |\psi_2| > 1. \end{cases}$$

3°. Вектор вспомогательных переменных по-прежнему удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= \psi_1, \end{aligned}$$

поэтому оптимальное управление

$$u^*(t) = \operatorname{dez}(\beta - \alpha t)$$

оказывается трехзначной кусочно-постоянной функцией, принимающей значения  $\{\pm 1, 0\}$ .

**3. Задача управления с минимумом энергии.**

Систему  $\Sigma_0^{(2)}$  перевести из известного состояния  $x^0$  в начало координат с помощью ограниченного управления  $|u| \leq 1$  так, чтобы минимизировать функционал

$$J(u) = 0,5 \int_0^T u^2(t) dt.$$

1°. Гамильтониан системы для данной задачи принимает вид

$$H(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = -0,5u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

2°. Максимум этого выражения по  $u$  при условии  $|u| \leq 1$  будет иметь место тогда, когда

$$u^*(t) = \text{sat } \psi_2(t) = \begin{cases} \psi_2, & |\psi_2| \leq 1; \\ \text{sgn } \psi_2 & |\psi_2| > 1. \end{cases}$$

3°. Вектор вспомогательных переменных удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= \psi_1, \end{aligned}$$

поэтому оптимальное управление  $u^*(t) = \text{sat}(\beta - \alpha t)$ .

**4. Задача предельного быстрогодействия для линейных систем.**

Систему

$$\Sigma^{(n)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) : \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$$

перевести из известного состояния  $\mathbf{x}^0$  в начало координат с помощью ограниченного управления  $\mathbf{u}(t) \in U^m$ , где  $U^m$  —  $m$ -мерный единичный куб.

1°. Гамильтониан системы для данной задачи принимает вид

$$H(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = -1 + \psi^T(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}).$$

2°. Максимум этого выражения по  $\mathbf{u}$  при условии  $\mathbf{u}(t) \in U^m$  будет иметь место тогда, когда

$$\mathbf{u}^*(t) = \text{SGN}(\mathbf{B}^T \psi). \quad (14.37)$$

3°. Вектор вспомогательных переменных удовлетворяет системе уравнений

$$\dot{\psi} = -\mathbf{A}^T \psi,$$

сопряженной с основной системой  $\Sigma^{(n)}: (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ .

Теорема Понтрягина, на основе которой получено выражение для оптимального управления (14.37), формулирует для линейной системы  $\Sigma^{(n)}: (\mathbf{A}, \mathbf{B})$  не только необходимые, но и достаточные условия. Из существования оптимального управления следует его единственность.

Для линейной системы  $\Sigma^{(n)}: (\mathbf{A}, \mathbf{B})$  с действительными собственными числами число переключений каждой компоненты оптимального управления  $\mathbf{u}^*(t)$  не превосходит  $(n-1)$ . Этот результат известен как **теорема Беллмана–Фельдбаума**.

### 14.3. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Динамическое программирование как метод, разработанный Р. Беллманом для решения задач оптимального управления, основывается на следующем утверждении.

**Принцип оптимальности** (*R. Bellman, 1957*) *Каковы бы ни были первоначальные состояния системы и управление в начальный момент, последующее управление должно быть оптимальным относительно состояния, получающегося в результате первого управления.*

Пусть для системы

$$\Sigma^{(n)}: \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

поставлена задача оптимального управления в форме Лагранжа. Найти допустимое управление  $\mathbf{u}(t) \in U^m$ , которое минимизировало бы интегральный критерий качества движения

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{x}, T) = \int_0^T \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt.$$

Конечное состояние  $\mathbf{x}(T)$  системы не задано.

Предположим, что задача решена и найдена оптимальная траектория движения системы. Функционал качества движения при фиксированном  $T$  оказывается зависящим от  $\mathbf{x}^0$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $t_0$  однако на оптимальной траектории только лишь от  $\mathbf{x}^0$ ,  $t_0$ . Обозначим минимальное значение функционала вдоль оптимальной траектории через

$$S(\mathbf{x}^0, t_0) = \min_{\mathbf{u}(t) \in U} \left[ \int_{t_0}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \right]. \quad (14.38)$$

Для произвольного момента времени  $t_1 \in [t_0, T]$  это выражение можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$S(\mathbf{x}^0, t_0) = \min_{\mathbf{u}(t) \in U} \left[ \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt + \int_{t_1}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \right],$$

которую, согласно принципу оптимальности Беллмана, теперь можно записать в виде

$$S(\mathbf{x}^0, t_0) = \min_{\mathbf{u}(t) \in U} \left[ \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt + S(\mathbf{x}^1, t_1) \right], \quad (14.39)$$

где  $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}(t_1)$  — состояние системы в момент  $t_1$ .

Пусть  $t_1 = t_0 + \Delta t$ , тогда  $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \Delta \mathbf{x}$ .

Разложим функцию  $S(\mathbf{x}^1, t_1)$  в окрестности точки  $(\mathbf{x}^0, t_0)$  в ряд Тейлора, предполагая существование у этой функции непрерывных частных производных по всем ее аргументам:

$$S(\mathbf{x}^1, t_1) = S(\mathbf{x}^0, t_0) + \text{grad}^T S(\mathbf{x}^0, t_0) \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial S(\mathbf{x}^0, t_0)}{\partial t} \Delta t + o(\Delta t), \quad (14.40)$$

где

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}(t), t_0) \Delta t + o(\Delta t), \quad (14.41)$$

поэтому

$$S(\mathbf{x}^1, t_1) = S(\mathbf{x}^0, t_0) + \text{grad}^T S(\mathbf{x}^0, t_0) \mathbf{f}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}(t), t_0) \Delta t + S(\mathbf{x}^0, t_0) \Delta t + o(\Delta t).$$

Воспользуемся этим выражением для вычисления

$$S(\mathbf{x}^0, t_0) = \min_{\mathbf{u}(t) \in U} \left[ \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + S(\mathbf{x}^0, t_0) + \right. \\ \left. + \text{grad}^T S(\mathbf{x}^0, t_0) \mathbf{f}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}(t), t_0) + \frac{\partial S(\mathbf{x}^0, t_0)}{\partial t} \right] \Delta t + o(\Delta t). \quad (14.42)$$

Если удалить члены, не зависящие от управления  $\mathbf{u}(t)$ , стоящих в прямых скобках, за знак  $\min$  и перейти к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим выражение, справедливое не только для  $t_0$ , но и для любого текущего момента времени  $t \in [t_0, T]$ :

$$\min_{\mathbf{u}(t) \in U} \left[ \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \text{grad}^T S(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t), t) \right] + \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0. \quad (14.43)$$

Это выражение, которое является необходимым условием оптимальности управления  $\mathbf{u}(t)$ , называют **уравнением Беллмана**.

Уравнение Беллмана является нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных относительно  $S(\mathbf{x}, t)$ . Необычность этого уравнения в том, что оно содержит операцию минимизации. Регулярных аналитических методов решения таких уравнений нет. Однако после выполнения операции минимизации, в результате которой определяют оптимальное управление  $\mathbf{u}^*$  как функцию от  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} S(\mathbf{x}, t)$ , это уравнение становится обычным уравнением в частных производных с одним граничным условием  $S(\mathbf{x}^*, T) = 0$ :

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) + \text{grad}^T S(\mathbf{x}^*, t) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) + \frac{\partial S(\mathbf{x}^*, t)}{\partial t} = 0. \quad (14.44)$$

Решением этого уравнения является функция  $S(\mathbf{x}, t)$ , которую используем для вычисления функции оптимального управления  $\mathbf{u}^*(t)$ .

Суммируем сказанное в виде алгоритмической процедуры метода. Для решения задачи оптимального управления в форме Лагранжа необходимо:

1°. Составить функцию Беллмана

$$B \left( \mathbf{x}, \mathbf{u}, t, \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \text{grad}^T S(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (14.45)$$

2°. Минимизировать функцию Беллмана по  $\mathbf{u}(t)$

$$\min_{\mathbf{u}(t) \in U} B \left( \mathbf{x}, \mathbf{u}, \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}, t \right) = B^* \left( \mathbf{x}, \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}, t \right), \quad (14.46)$$

при этом следует определить управление как явную функцию вектора состояния и

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} : \mathbf{u}^* = \mathbf{u} \left( \mathbf{x}^*, \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right).$$

3°. Составить уравнение Беллмана

$$B^* \left( \mathbf{x}, \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}, t \right) + \frac{\partial S(\mathbf{x}^*, t)}{\partial t} = 0, \quad S(\mathbf{x}^*, T) = 0. \quad (14.47)$$

4°. Решением этого уравнения является функция  $S(\mathbf{x}, t)$ , по которой определяют  $\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}$ , а затем и искомое оптимальное управление

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} \left( \mathbf{x}^*, \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right). \quad (14.48)$$

Рассмотрим задачу Лагранжа с закрепленными концами и свободным временем для произвольной динамической системы

$$\Sigma^{(n)} : \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^*, \quad \mathbf{u}(t) \in U^m.$$

Следует найти допустимое управление, переводящее эту систему из  $\mathbf{x}^0$  в  $\mathbf{x}^*$  так, чтобы критерий качества

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, T) = \int_0^T \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt$$

принимал наименьшее значение.

Для решения этой задачи, согласно процедуре метода, введем в рассмотрение функцию  $R(\mathbf{x})$ , которая совпадает с наименьшим значением критерия вдоль оптимальной траектории от текущего состояния  $\mathbf{x}$  до цели  $\mathbf{x}^*$ . Эта функция, очевидно, зависит только от текущего состояния. Предположим, что эта функция непрерывно дифференцируема. Уравнение Беллмана в этом случае принимает вид

$$\min_{\mathbf{u}(t) \in U} [\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \text{grad}^T R(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))] = 0. \quad (14.49)$$

*Задача максимального быстродействия* — это частный случай сформулированной задачи Лагранжа с закрепленными концами и свободным временем, если положить в ней  $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \equiv 1$ . Содержательный смысл функции  $R(\mathbf{x})$  — наименьшее время, необходимое для перевода системы из текущего состояния  $x(t)$  до цели.

Уравнение Беллмана для этой задачи принимает вид

$$\min_{\mathbf{u}(t) \in U} [\text{grad}^T R(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))] = -1, \quad R(\mathbf{x}^*) = 0. \quad (14.50)$$

Уравнение Беллмана имеет простую геометрическую интерпретацию. Пусть целью движения является начало координат  $\mathbf{x}^* = 0$ , тогда функция  $R(\mathbf{x}) = T^*$  определяет множество точек фазового пространства, для которых время перехода системы в начало координат составляет ровно  $T^*$ . Называют эту гиперповерхность *изохронной*.

Записав для этого случая уравнение Беллмана в максимальной форме

$$\max_{\mathbf{u}(t) \in U} [-\text{grad}^T R(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))] = 1, \quad (14.51)$$

получим геометрическое условие оптимальности в задаче быстродействия: *оптимальное управление следует выбирать таким, чтобы в любой точке изохроны вектор*

нормали  $-\text{grad}R(\mathbf{x})$  и текущий вектор фазовой скорости  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  были предельно близки, и если бы управление не было бы ограничено оба вектора должны были бы иметь одно направление.

### Примеры:

1. Для системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 u_1, \\ \dot{x}_2 &= u_2\end{aligned}$$

с ограниченным управлением  $|u_1| \leq 1$ ,  $|u_2| \leq 1$  решить задачу Лагранжа. Составить уравнение Беллмана, если движение системы оценивается критерием

$$J(x) = \int_0^T F(x_1, x_2, t) dt.$$

Обозначим

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad U^2 = \{|u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}.$$

Согласно первому шагу процедуры, составляем функцию Беллмана

$$B\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}\right) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1}(x_1 + x_2 u_1) + \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2} u_2.$$

На втором шаге находим, что минимум этой функции по ограниченному управлению  $\mathbf{u} \in U^2$  достигается, если

$$\begin{aligned}u_1^* &= -\text{sgn}\left(\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1} x_2\right), \\ u_2^* &= -\text{sgn}\left(\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2}\right),\end{aligned}$$

что позволяет записать искомое уравнение Беллмана

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1} x_1 - \left| \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1} x_2 \right| - \left| \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2} \right| + \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0.$$

2. Для управляемого объекта первого порядка

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad x(0)$$

без ограничения на управление поставлена задача Лагранжа с фиксированным временем и свободным правым концом. Критерий оптимальности движения принят в виде

$$J(x, u) = \int_0^T (x^2(t) + cu^2(t)) dt, \quad c > 0.$$

Найти решение задачи в классе линейных функций  $u(t) = k(t)x(t)$ . Составим функцию Беллмана для этой задачи

$$B(x, u) = x^2(t) + cu^2(t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}(ax(t) + bu(t))$$

и найдем ее минимум, используя для этого достаточные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(x, u)}{\partial u} &= 2cu(t) + b \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 B(x, u)}{\partial u^2} &= c > 0. \end{aligned}$$

Откуда следует, что оптимальное управление должно иметь вид

$$u^* = -\frac{b}{2c} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}.$$

Составим теперь дифференциальное уравнение Беллмана относительно функции  $S(x(t), t)$

$$x^2 - \frac{b^2}{4c^2} \left( \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right)^2 + ax \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = 0,$$

для которого известно, что  $S(x(T), T) = 0$ .

Получили нелинейное уравнение первого порядка в частных производных, которое в общем случае не имеет решения. Однако в нашем случае, когда управление должно быть линейным относительно  $x$ , искомое решение  $S(x, t)$  можно найти в виде функции от  $x^2$ , например, в виде

$$S(x, t) = p(t)x^2.$$

Составим уравнения относительно новой неизвестной  $p(t)$ , для чего найдем

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} = 2p(t)x,$$

а затем

$$u^* = -\frac{b}{c} p(t)x,$$

и подставим эти результаты в уравнение Беллмана. Получим нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка типа Риккати с граничным условием на правом конце.

$$\frac{d}{dt}p(t) - \frac{b^2}{c^2}p^2(t) - 2ap(t) + 1 = 0, \quad p(T) = 0.$$

Решить это уравнение можно, например, методом разделения переменных. Решение принимает вид

$$p(t) = p_1 p_2 \frac{1 - \exp\left(-\frac{b^2}{c^2}(p_1 - p_2)(T - t)\right)}{p_2 - p_1 \exp\left(-\frac{b^2}{c^2}(p_1 - p_2)(T - t)\right)},$$

где  $p_1, p_2$  — корни уравнения  $0, 5b^2p^2(t) + 2ap(t) - 1 = 0$ .

Заметим, что если  $T$  достаточно велико, то  $p(t)$  не на много отличается от постоянной, при этом:

$$\begin{aligned} p(t) &\simeq p_1, & p_1 > p_2; \\ p(t) &\simeq p_2, & p_2 > p_1. \end{aligned}$$

Итак, если в в настоящей задаче  $T$  достаточно велико, то почти точно

$$p(t) = \max(p_1, p_2).$$

**3.** Найти оптимальное управление в задаче Лагранжа с закрепленными концами для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= ax_2 + u; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \end{aligned}$$

если управление не ограничено, цель движения  $x^*$  и критерий оптимальности имеет вид

$$J(\mathbf{x}, u) = \int_0^{\infty} (x_1^2 + cx_2^2 + u^2) dt, \quad c > 0.$$

Составим функцию Беллмана

$$B(\mathbf{x}, u) = cx_2^2 + u^2 + \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_2} (ax_2 + u)$$

и минимизируем ее по управлению. Ясно, что

$$u^* = -0,5 \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_2},$$

поэтому дифференциальное уравнение Беллмана принимает вид

$$x_1^2 + cx_2^2 - 0,25 \left( \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_2} ax_2 = 0; \quad R(\mathbf{0}) = 0.$$

Решение этого уравнения будем искать в квадратичной форме от вектора состояния

$$R(\mathbf{x}) = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2.$$

Для определения коэффициентов квадратичной формы подставим  $R(\mathbf{x})$  в уравнение Беллмана.

После соответствующих преобразований находим:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2a \frac{1 - 8a}{c + 8\sqrt{2a}}, \\ \beta &= 2, \\ \gamma &= \frac{4c + 16}{1 - 8a}, \end{aligned}$$



а затем и искомое оптимальное управление

$$u^* = -2x_1 - \frac{4(c+2)}{1-8a}x_2.$$

**4.** Найти допустимое управление  $|u(t)| \leq 1$ , которое максимально быстро переведет систему

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t)$$

из начального состояния  $x(0)$  в начало координат.

Составим функциональное соотношение Беллмана для данной задачи

$$\min_{|u(t)| \leq 1} \left[ \frac{dR(x)}{dx} (ax(t) + u(t)) \right] = -1, \quad R(0) = 0.$$

Ясно, что минимум выражения в скобках достигается при

$$u^* = -\operatorname{sgn} \left( \frac{dR(x)}{dx} \right),$$

поэтому уравнение Беллмана принимает вид

$$\frac{dR(x)}{dx} ax - \left| \frac{dR(x)}{dx} \right| = -1, \quad R(0) = 0.$$

По смыслу функция  $R(x) \geq 0$  и является монотонно убывающей для  $x < 0$  и монотонно возрастающей для  $x > 0$ , поэтому  $u^* = -\operatorname{sgn} x$ . При этом время достижения находим, решив уравнение Беллмана

$$R(x) = \ln \frac{1 - a|x|}{a}, \quad |x| < \frac{1}{a}.$$

**5.** Найти допустимое управление  $|u(t)| \leq 1$  для быстрого перевода из произвольной точки фазового пространства в начало координат системы второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u; \quad \mathbf{x}(0). \end{aligned}$$

Составим функциональное соотношение Беллмана для данной задачи

$$\min_{|u(t)| \leq 1} \left[ \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_2} u(t) \right] = -1, \quad R(\mathbf{0}) = 0.$$

Ясно, что минимум выражения в скобках достигается при

$$u^* = -\operatorname{sgn} \left( \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right),$$

поэтому дифференциальное уравнение Беллмана принимает вид

$$1 + \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_1} x_2 - \left| \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right| = 0, \quad R(\mathbf{0}) = 0.$$

Рассмотрим область  $\Phi_1 = \{(x_1, x_2): \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_2} > 0\}$ , в которой  $u^* = -1$ , и уравнение Беллмана принимает вид

$$1 + \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_2} = 0.$$

Решение этого уравнения  $R(\mathbf{x}) = x_2 + 2\sqrt{0,5x_2^2 + x_1}$ .

В области  $\Phi_2 = \{(x_1, x_2): \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_2} < 0\}$ , в которой  $u^* = 1$ , уравнение Беллмана принимает вид:

$$1 + \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_2} = 0.$$

Решение этого уравнения

$$R(\mathbf{x}) = -x_2 + 2\sqrt{0,5x_2^2 - x_1}.$$

Объединим полученные результаты: границей областей  $\Phi_1, \Phi_2$  является кривая

$$x_1 + 0,5x_2^2 \operatorname{sgn} x_2 = 0,$$

поэтому искомое оптимальное управление

$$u^* = -\operatorname{sgn}(x_1 + 0,5x_2^2 \operatorname{sgn} x_2).$$

Заметим, что найденное оптимальное управление представлено в явной зависимости от фазовых координат состояния системы, что позволяет синтезировать замкнутую систему управления.

Еще один замечательный результат. В каждой области  $\Phi_1, \Phi_2$  можно определить аналитическое выражение для семейства изохрон уровня  $T^*$ .

Например, это семейство определяет выражение:

$$\text{в области } \Phi_1: \quad x_1 + 0,5x_2^2 - 0,25(T^* - x_2)^2 = 0;$$

$$\text{в области } \Phi_2: \quad x_1 - 0,5x_2^2 + 0,25(T^* + x_2)^2 = 0;$$

$$\text{на границе этих областей: } \quad x_1 + 0,5x_2^2 T^* = 0.$$

На рис. 14.1 показано семейство изохрон данной задачи и выделены в точке  $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$  вектор  $\operatorname{grad}R(A) = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$  и вектор фазовой скорости  $\mathbf{f}(A, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$ . Уравнение Беллмана в максимальной форме позволяют графически найти оптимальное управление в данной точке фазового пространства.

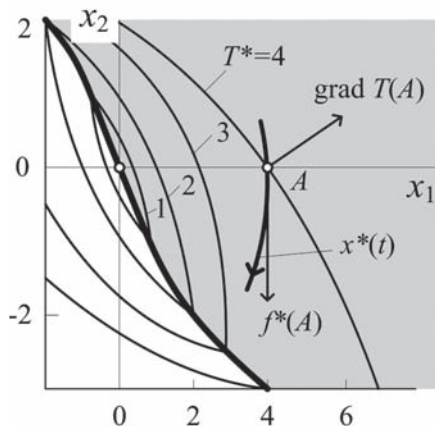


Рис. 14.1

Семейство изохрон задачи максимального быстродействия

Из всех возможных управлений лишь при управлении  $u = -1$  фазовый вектор будет иметь наибольшую проекцию на направление нормали

$$-\text{grad}R(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

к изохроне в этой точке. Значит оптимальное управление в этой точке  $u^*(\mathbf{A}) = -1$ .

#### 14.4. СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ

Реальная траектория движения системы в силу неизбежных причин всегда отличается от расчетной, поэтому проблема реализации программного движения сопряжена с необходимостью решения задачи автоматической стабилизации реальной траектории относительно расчетной.

Назовем, следуя А. М. Ляпунову, отклонение реального движения  $\mathbf{z}(t)$  от расчетного  $\mathbf{z}^*(t)$  *возмущенным движением*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}^*(t).$$

Чтобы погасить возмущенное движение, необходимо дополнительное управление  $\mathbf{u}(t)$ .

Уравнение возмущенного движения системы представят линейной моделью

$$\Sigma^{(n)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}): \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \mathbf{x}(0),$$

которое получается из разложения реального движения в ряд Тейлора в окрестности расчетного движения.

Задача оптимальной стабилизации траектории движения состоит в том, чтобы найти управление  $\mathbf{u}(t)$ , которое бы при любых начальных возмущениях приводило систему  $\Sigma^{(n)}$  в начало координат, минимизируя при этом текущее отклонение, затраты энергии на управление и конечное отклонение от цели. Последнее означает, что критерий качества управления принимает вид квадратичного функционала

$$J(\mathbf{u}(t)) = 0,5 \int_0^T (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{R}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}_2\mathbf{u}(t))dt + 0,5\mathbf{x}^T(T)\mathbf{R}_3\mathbf{x}(T), \quad (14.52)$$

где  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$  — положительно определенные симметрические матрицы;  $\mathbf{R}_3$  — положительно полуопределенная матрица.

Решение задачи оптимальной стабилизации можно найти методом динамического программирования либо с использованием принципа максимума.

В гл. 11 для решения задачи аналитического синтеза оптимального регулятора использовался принцип максимума, сейчас для решения аналогичной задачи стабилизации воспользуемся процедурой динамического программирования.

Функциональное уравнение Беллмана принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \min_{\mathbf{u}(t)} 0,5(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{R}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}_2\mathbf{u}(t)) + \\ + 0,5\text{grad}^T S(\mathbf{x}, t)(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) = 0 \end{aligned} \quad (14.53)$$

с граничным условием  $S(\mathbf{x}(T), T) = 0,5\mathbf{x}^T(T)\mathbf{R}_3\mathbf{x}(T)$ .

Выполнив, используя необходимое условие, операцию минимизации, получим

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{B}^T\text{grad}S(\mathbf{x}, t).$$

Для того чтобы оптимальное управление  $\mathbf{u}^*(t)$  было линейной формой от вектора состояния, необходимо, чтобы функция  $S(\mathbf{x}, t)$  имела вид квадратичной формы

$$S(\mathbf{x}, t) = 0,5\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t),$$

где  $\mathbf{P}(t)$  — симметрическая матрица. В силу этого предположения оптимальное управление принимает вид

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t). \quad (14.54)$$

Матрицу  $\mathbf{P}(t)$  можно найти, решив дифференциальное уравнение Риккати, которое получается, если в уравнение Беллмана подставить найденное выражение оптимального управления

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t) - \mathbf{R}_1, \quad \mathbf{P}(T) = \mathbf{R}_3. \quad (14.55)$$

Р. Калман доказал, что решение этого уравнения  $\mathbf{P}(t)$  единственно, и уравнение Беллмана оказывается *необходимым и достаточным условием оптимальности* найденного управления. Кроме того Р. Калман показал, что при  $T \rightarrow \infty$  для

стационарной вполне управляемой линейной системы матричное дифференциальное уравнение Риккати сводится к алгебраическому уравнению

$$\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{B}^T\tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{R}_1 = 0, \quad (14.56)$$

решение которого определяет постоянную матрицу  $\tilde{\mathbf{P}}$  и оптимальное управление в замкнутой форме

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (14.57)$$

где  $\mathbf{K} = \mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{B}^T\tilde{\mathbf{P}}$  — матрица обратной связи.

**Пример.** Модель возмущенного движения ракеты переменной массы имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{k_1}{k_2 - t}x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= u(t), \end{aligned}$$

где  $x_1$ ,  $x_2$  — отклонение от расчетной траектории и его скорость соответственно;  $x_3$  — угол направления вектора тяги;  $k_1$ ,  $k_2$  — известные параметры.

Найти такое управление, которое бы стабилизировало движение ракеты относительно расчетной траектории так, чтобы минимизировать функционал качества

$$J(\mathbf{x}, u) = 0,5 \int_0^{\infty} 50(\mathbf{x}^T(t) \text{diag} (0, 5 \cdot 10^{-6} \quad 10^{-3} \quad 10^3) \mathbf{x}(t) + 10u^2(t))dt,$$

Поскольку  $R_2 = 10$ ,  $\mathbf{B} = (0 \ 0 \ 1)^T$  и матрица  $\mathbf{P}(t) = (p_{ij}(t))$  имеет размер  $3 \times 3$ , то искомое оптимальное управление принимает вид

$$u^*(t) = -0,1 (p_{13}(t) \ p_{23}(t) \ p_{33}(t)) \mathbf{x}(t).$$

Матричное уравнение Риккати порождает в силу симметричности матрицы  $\mathbf{P}(t)$  шесть дифференциальных уравнений с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad p_{ij}(T) &= 0 : \\ \dot{p}_{11} &= 0, 1p_{13}^2 - \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{(300 - t)^2}; \\ \dot{p}_{12} &= 0, 1p_{13}p_{23} - p_{11}; \\ \dot{p}_{13} &= 0, 1p_{13}p_{33} - k_1(k_2 - t)p_{12}; \\ \dot{p}_{22} &= 0, 1p_{23}^2 - 2p_{12} - \frac{10^{-3}}{(300 - t)^2}; \\ \dot{p}_{23} &= 0, 1p_{23}p_{33} - k_1(k_2 - t)p_{22} - p_{13}; \\ \dot{p}_{33} &= 0, 1p_{33}^2 - 2k_1(k_2 - t)p_{23} - \frac{10^{-3}}{(300 - t)^2}. \end{aligned}$$

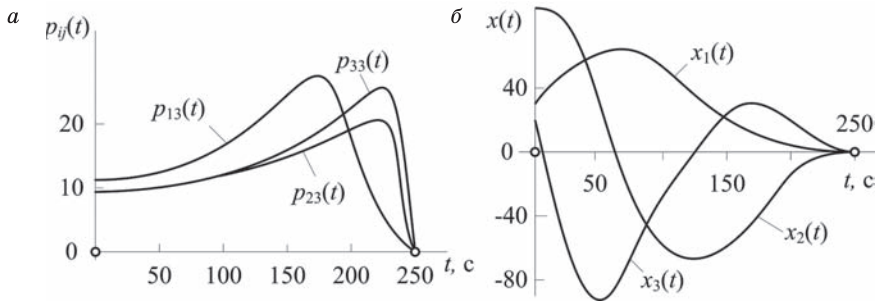


Рис. 14.2

Результаты решения задачи: а — компоненты матрицы  $P(t)$ , определяющие оптимальное управление; б — координаты движения стабилизации.

Эту систему нелинейных дифференциальных уравнений с условиями на правом конце путем замены переменного  $\tau = 250 - t$  решают в *обратном времени*.

На рис. 14.2 приведены результаты решения: компоненты матрицы  $P(t)$ , определяющие оптимальное управление и координаты движения стабилизации из начального состояния  $x(0)$ .

#### 14.5. СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ

Численные методы решения задачи оптимального быстрогодействия позволяют найти управление как функцию времени. Такое представление приводит к разомкнутым структурам, к системам программного управления, вынуждая регулятор в том или ином темпе периодически повторять процедуру вычисления оптимального управления.

*Проблема синтеза* оптимальной по быстродействию системы сводится к отысканию оптимального управления в форме явной зависимости от координат вектора состояния. Области фазового пространства, где оптимальное управление постоянно и одного знака, разделяют *поверхности переключения*.

Проблема синтеза считается полностью разрешенной, если найдены аналитические представления поверхностей переключения как функций координат фазового пространства. Заметим, что трудности общего решения задачи синтеза становятся непреодолимыми уже для систем порядка выше трех.

Проблема синтеза полностью разрешима для линейных систем второго порядка. Проследим за решением этой проблемы для системы второго порядка

$$\dot{x} = Ax + bu; \quad x(0),$$

собственные числа которой  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Рассмотрим различные случаи представления этой системы. Пусть первоначально все собственные числа системы — действительные.

- Случай  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ .

Невырожденным преобразованием переменных  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$  уравнение движения системы приводим к удобному для решения задачи виду

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} u, \quad \mathbf{z}(0) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Оптимально быстрый перевод системы из начального состояния в начало координат возможно выполнить, используя управление (14.37)

$$u^* = \operatorname{sgn}(\lambda_1 \lambda_1) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

где вспомогательный вектор  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{\psi} = - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \psi.$$

Таким образом, оптимальное управление — релейная функция, которая меняет знак не более чем однажды.

Построим фазовый портрет системы. Уравнения движения системы в скалярной записи имеют независимый вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 + \lambda_1 u; & z_1(0) &= \xi_1; \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 + \lambda_2 u; & z_2(0) &= \xi_2, \end{aligned}$$

поэтому решения этих уравнений

$$\begin{aligned} z_1(t) &= (\xi_1 + u)e^{\lambda_1 t} - u, \\ z_2(t) &= (\xi_2 + u)e^{\lambda_2 t} - u. \end{aligned}$$

Уравнения кривых фазового портрета системы можно получить, исключив время как параметр из найденных решений:

$$z_2 = (\xi_2 + u) \left( \frac{z_1 + u}{\xi_1 + u} \right)^\beta; \quad \beta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Фазовые портреты системы для  $u = \pm 1$  представляют два семейства кривых типа *устойчивый узел*: каждая кривая семейства начинается в точке  $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$  и заканчивается в своем положении равновесия в точке  $O^+ = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  либо в точке  $O^- = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Среди кривых каждого семейства имеется по одной кривой  $L^+$  и  $L^-$ , которые проходят через начало координат фазового пространства. Эти кривые образуют **линию переключения**

$$L = L^+ \cup L^-,$$

по этим кривым проходит завершающая часть движения системы в начало координат.

Линия переключения делит фазовое пространство на два множества, в одном из них оптимальное управление принимает значение  $u^* = 1$ , в другом  $u^* = -1$ , смена знака управления происходит на линии переключения.

В данном случае:

$$\begin{aligned} L^+ &= \{(z_1, z_2): z_2 = (1 + z_1)^\beta - 1; \quad z_1 > 0, z_2 > 0\}; \\ L^- &= \{(z_1, z_2): z_2 = -(1 - z_1)^\beta + 1; \quad z_1 < 0, z_2 < 0\}; \\ L &= \{(z_1, z_2): z_2((1 + |z_1|)^\beta - 1)\text{sgn } z_1\}. \end{aligned}$$

На рис. 14.3, а приведена фазовая картина синтеза.

- Случай  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ .

Невырожденным преобразованием переменных  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$  уравнение движения системы приводим к виду

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} u; \quad \mathbf{z}(0) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

или в скалярной форме

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_2 u; \quad z_1(0) = \xi_1, \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 + \lambda_2 u; \quad z_2(0) = \xi_2. \end{aligned}$$

Эти уравнения легко разрешаются:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \xi_1 + \lambda_2 u t; \\ z_2(t) &= (\xi_2 + u)e(\lambda_2 t) - u, \end{aligned}$$

что позволяет записать уравнение семейства кривых фазового портрета,

$$z_2(t) = \left[ (\xi_2 + u)e^{\frac{z_1 - \xi_1}{u}} \right] - u$$

и искомую линию переключения представляют две кривые этого семейства, проходящие через начало координат и которые описываются выражением

$$L = \{(z_1, z_2) : z_2 = (e^{|z_1|} - 1)\text{sgn } z_1\}.$$

На рис. 14.3, б показана фазовая картина синтеза.

- Случай  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  — рассматривали ранее.

Напомним, что уравнения движения этой системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u; \quad \mathbf{x}(0). \end{aligned}$$

Фазовый портрет системы для  $u = \pm 1$  — это два семейства парабол

$$x_1 = 0, 5x_2^2 u + C,$$



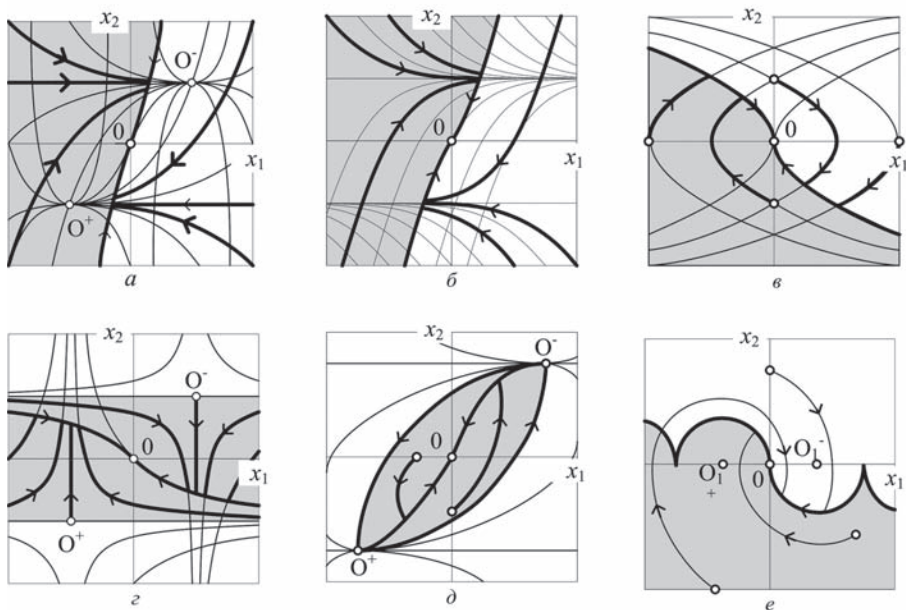


Рис. 14.3

Фазовая картина оптимального синтеза системы второго порядка с собственными числами: а — действительные отрицательные не равные; б — действительные, одно отрицательное, другое равно нулю; в — оба равны нулю; г — действительные разного знака; д — собственные числа системы действительные положительные не равные; е — собственные числа мнимые.

поэтому линию переключения представляют две кривые этого семейства, проходящие через начало координат и которые описываются выражением

$$L = \{(x_1, x_2) : x_1 = -0,5x_2^2 \operatorname{sgn} x_2\}.$$

На рис. 14.3, в приведена фазовая картина синтеза.

• Случай  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ .

Фазовые портреты системы для  $u = \pm 1$  представляют собой два семейства гипербол с центрами в точках

$$O^+ = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ и } O^- = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Среди кривых каждого семейства имеется по одной кривой, проходящих через начало координат фазового пространства. Эти кривые образуют линию переключения. Однако не трудно увидеть, что достичь эту линию переключения можно лишь из точек, расположенных в полосе

$$\{(x_1, x_2) : |x_2| < 1\}.$$

Для этих и только этих точек множества возможен синтез оптимального управления. На рис. 14.3, *г* показана фазовая картина синтеза.

- Случай  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ .

Управляемая система неустойчива, ее фазовый портрет — *неустойчивый узел*. Тем не менее оптимально быстрый перевод в точку покоя возможен, однако не для любой начальной точки, а лишь для тех, которые расположены в некоторой замкнутой области, содержащей точку покоя. На рис. 14.3, *д* приведена фазовая картина синтеза для такой системы.

- Случай  $\lambda_1, \lambda_2$  — комплексные.

Оптимальное управление для линейных систем с комплексными полюсами не удовлетворяет *теореме Беллмана–Фельдбаума*, число переключений управления не связано с порядком системы и зависит от ее начального состояния.

Для решения задачи синтеза найдем линию переключения, используя свойства фазового портрета системы.

Для управляемой системы второго порядка с комплексными полюсами  $\lambda_{1,2} = -\alpha + j\omega$ ,  $\alpha > 0$  фазовый портрет представляет собой при  $u = \pm 1$  два семейства логарифмических спиралей, навивающихся на фокус в точках

$$O^+ = \left( \begin{array}{c} -\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \\ \frac{1}{\alpha} \\ -\frac{1}{\omega(\alpha^2 + \omega^2)} \end{array} \right) \quad \text{и} \quad O^- = \left( \begin{array}{c} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \\ \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{\omega(\alpha^2 + \omega^2)} \end{array} \right).$$

Заметим, что если  $\alpha = 0$ , то фазовые кривые портрета являются окружностями с центрами в точках

$$O^+ = \left( \begin{array}{c} -\frac{1}{\omega^2} \\ 0 \end{array} \right), \quad O^- = \left( \begin{array}{c} \frac{1}{\omega^2} \\ 0 \end{array} \right).$$

Оптимальное управление  $u^* = \text{sgn}\psi_2$ , вспомогательная переменная удовлетворяет уравнению

$$\dot{\psi} = -\mathbf{A}^T \psi.$$

Собственные числа матрицы  $-\mathbf{A}^T$  совпадают с точностью до знака с собственными числами системы. Значит  $\psi_2(t)$  — гармоническая функция с периодом  $2\pi/\omega$  секунд, но тогда оптимальное управление меняет свой знак каждые  $\pi/\omega$  секунд.

Таким образом, любое оптимальное движение в начало координат, складывается из движения по кривой одного семейства в течение времени  $\pi/\omega$  секунд, последующего движения  $\pi/\omega$  секунд — по кривым второго семейства и так далее.

Исключение могут составить начальный и финальный участки траектории движения, по которым время движения может быть меньше  $\pi/\omega$ .

Заметим, что, пробегая  $\pi/\omega$  секунд — половину периода по кривой портрета спирали или окружности, фазовая точка стягивает центральную дугу величиной  $\pi$ .

Используя отмеченные свойства оптимального движения, построим линию переключения. Пусть  $L^+{}_0$ ,  $L^-{}_0$  — кривые из двух семейств портрета, например, полуокружности, которые проходят через начало координат и стягивают угол  $\pi$ .

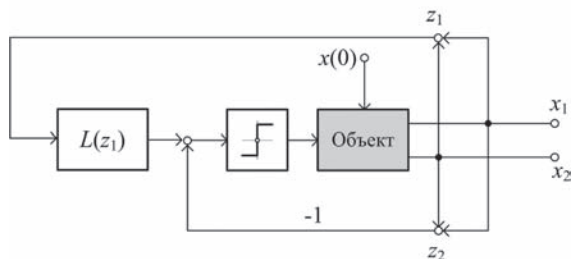


Рис. 14.4

Структура замкнутой системы второго порядка, оптимальной по быстродействию

Обозначим  $L^{-}_1$ ,  $L^{+}_1$  геометрическое место точек, откуда можно перейти за время  $\pi/\omega$  с на полуокружности  $L^{+}_0$ ,  $L^{-}_0$  соответственно. Этими геометрическими местами оказываются также полуокружности.

Определим далее  $L^{+}_2$ ,  $L^{-}_2$  как геометрическое место точек, откуда можно перейти за время  $\frac{\pi}{\omega}$  секунд на полуокружности  $L^{+}_1$ ,  $L^{-}_1$ . Такое определение можно продолжить.

Линию переключения оптимального управления определяют как объединение всех таких полуокружностей

$$L = \bigcup_k (L^{-}_k \cup L^{+}_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Это объединение представлено полуокружностями одного радиуса с центрами в точках

$$\left( \begin{array}{c} \pm(2k+1)\frac{1}{\omega} \\ 0 \end{array} \right).$$

Аналогично определяют линию переключения для системы с  $\alpha \neq 0$ .

На рис. 14.3, e приведена фазовая картина синтеза.

Завершающим этапом проблемы оптимального синтеза является определение структуры замкнутой системы управления. Тот факт, что линия переключения  $z_2^* = L(z_1)$  ориентирована и делит фазовую плоскость на два множества, в одном из которых оптимальное управление принимает значение  $u^* = 1$ , в другом  $u^* = -1$  позволяет составить алгоритм определения взаимного расположения текущего состояния системы относительно линии переключения и вместе с этим определять текущее значение оптимального управления

$$u^* = -\text{sgn}(z_2 - z_2^*). \quad (14.58)$$

Координаты вектора  $z(t)$  связаны с реальным состоянием  $x(t)$  системы линейным преобразованием, которое реализует регулятор системы.

На рис.14.4 представлен вариант реализации структуры замкнутой системы, оптимально быстро переходящей из ненулевого начального состояния в состояние покоя.

#### 14.6. СУБОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Оптимальное движение системы, формируемое оптимальным управлением, при технической реализации оказывается в силу ряда объективных причин недостижимым *предельным* свойством системы. Этот факт объективен прежде всего еще и потому, что любая математическая модель системы ограничено достоверна, так как практически невозможно идеально точно воспроизвести найденный оптимальный закон управления. В этом смысле все *реальные оптимальные системы* на самом деле являются *почти оптимальными (субоптимальными или квазиоптимальными)*.

Велико разнообразие квазиоптимальных систем, рассмотрим некоторые из них. Например, проследим последствия неточной реализации линии переключения. Пусть для системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}\tag{14.59}$$

оптимальную линию переключения

$$L = \{(x_1, x_2) : x_1 = -0,5x_2^2 \operatorname{sgn} x_2\}$$

аппроксимируют кусочно-линейно.

Изображающая точка, как показано на рис. 14.5, *а*, двигаясь из начального положения под действием управления  $u = 1$ , пересекает некоторый прямолинейный участок аппроксимации линии переключения.

В точке пересечения *A* угловой наклон линейного участка может оказаться меньше, чем угловой наклон касательной к траектории движения под действием управления  $u = -1$ . Возникает так называемый *скользящий режим движения*, когда движение формируется под действием управления, меняющего свой знак с большой частотой.

Истинное движение системы происходит, как показано на рис. 14.5, *а*, не по кривой фазового портрета, а по аппроксимирующей прямой *AB* до тех пор, пока выполняются условия существования скользящего режима.

Если в точке пересечения *B* угловой наклон линейного участка больше углового наклона касательной к траектории движения под действием управления  $u = -1$ , то дальнейшее движение происходит по одной из кривых фазового портрета системы и для достижения положения покоя уже потребуется более чем одно переключение.

Проследим последствия неточного воспроизведения функции переключения, которое реализовано неидеальными релейными устройствами. К примеру, если характеристика реле имеет гистерезис, то переключения оказываются всегда чуть позже оптимальных, поэтому движение оказывается квазиоптимальным и в окрестности положения покоя, как показано на рис. 14.5, *б*, возникают устойчивые автоколебания. Если характеристика реле имеет зону нечувствительности, то квазиоптимальное движение будет содержать прямолинейные траектории и движение закончится на отрезке покоя (рис. 14.5, *в*).

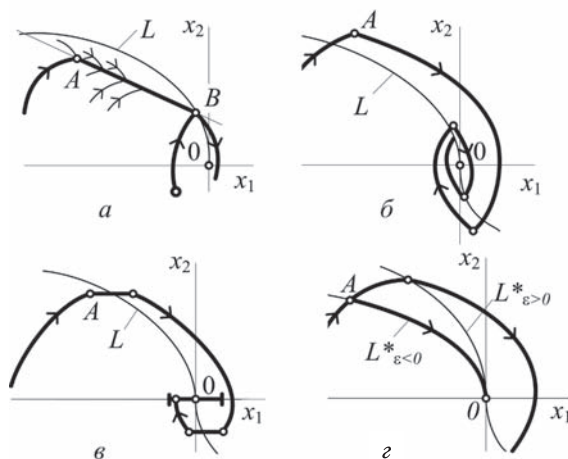


Рис. 14.5

Субоптимальное движение системы второго порядка: а — линейная аппроксимация линии переключения со скользящим режимом движения; б — характеристика переключателя с гистерезисом; в — характеристика переключателя с зоной нечувствительности; г — мультипликативное искажение линии переключения.

Проследим последствия неточного описания реальной системы ее моделью. Пусть реальную систему описывает уравнения (14.59), а ее модель уравнениями:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= (1 + \varepsilon)u.\end{aligned}$$

Реальная система движется по траекториям

$$x_1 = 0,5x_2^2 \operatorname{sgn} u + C$$

и оптимальные переключения должны происходить на кривой

$$L = \{(x_1, x_2) : x_1 = -0,5x_2^2 \operatorname{sgn} x_2\},$$

однако в регуляторе реализована кривая

$$\tilde{L} = \{(x_1, x_2) : x_1 = -0,5 \frac{x_2^2}{1 + \varepsilon} \operatorname{sgn} x_2\},$$

поэтому при  $\varepsilon > 0$ , субоптимальное движение будет содержать участки скользящего режима, а при  $\varepsilon < 0$ , (рис. 14.5, г) имеют место перерегулирование и многократные переключения управления.

Скользящий режим как специфическое движение нелинейной системы с разрывным управлением, целенаправленно используют для построения так называемых **систем с переменной структурой**, которые позволяют реализовать субоптимальное движение системы.

Основная идея, положенная в основу организации систем с переменной структурой, состоит в том, чтобы, вводя систему в состояние скользящего режима, принудить ее двигаться по траекториям, отличным от траекторий фазового портрета ее подсистем.

**Пример.** Используя метод переменной структуры, реализовать субоптимальное движение линейной системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + u.\end{aligned}$$

В системе принято управление в виде  $u = -x_1 \operatorname{sgn} G(x_1, x_2)$ .

Разрыв управления происходит на многообразии  $G(x_1, x_2) = 0$ . При этом двум разным управлениям соответствуют два различных движения системы, поэтому будем говорить, что система содержит две структуры:

- $\dot{x}_1 = x_2,$   
 $\dot{x}_2 = (1 - \alpha)x_1 - 2x_2;$
- $\dot{x}_1 = x_2,$   
 $\dot{x}_2 = (1 + \alpha)x_1 - 2x_2.$

Значение  $\alpha$  подбирается так, что первая структура системы имеет два правых комплексных полюса, а вторая — пару действительных полюсов разного знака. Обе структуры, как видно из рис. 14.6, *а*, *б* — неустойчивы, однако можно подобрать многообразие переключения  $G(x_1, x_2) = 0$  так, что вся система окажется асимптотически устойчивой в целом.

В самом деле, пусть

$$G = x_1(\beta x_1 + x_2), \quad \beta > 0.$$

Коэффициент  $\beta$  можно подобрать таким, чтобы в двусторонней окрестности прямой  $\beta x_1 + x_2 = 0$  фазовые кривые обеих структур системы были направлены встречно друг другу, что достаточно для возникновения скользящего режима.

Из любого начального положения изображающая точка попадает на прямую переключения

$$\check{L} = \{(x_1, x_2) : \beta x_1 + x_2 = 0\}$$

и скользит вдоль этой прямой вплоть до положения покоя (рис. 14.6, *в*). Значит на время скользящего движения система ведет себя как система первого порядка. Асимптотическая устойчивость системы очевидна.

Одним из эффективных методов синтеза субоптимальных свойств системы управления является метод динамического прогнозирования движения системы. Метод позволяет находить текущее значение управляющего воздействия на основе свойств траектории будущего движения системы, которое моделируется специальными вычислительными средствами в ускоренном масштабе времени.

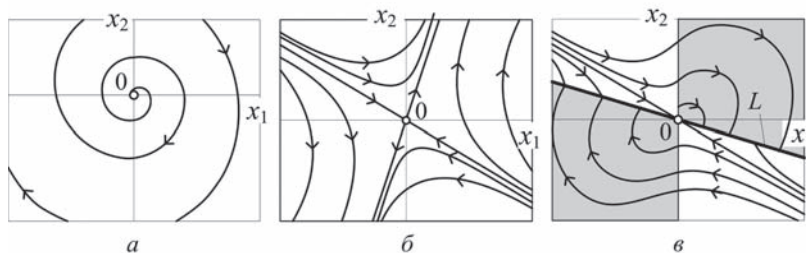


Рис. 14.6  
Система с переменной структурой

### 14.7. УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что стационарная точка  $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  является седловой для функции

$$J(x_1, x_2) = 0,5(-x_1^2 + 3x_2^2 - 10x_1 - 14x_2 + 2x_1x_2 + 11).$$

2. Найти траекторию, которая проходит через точки:

- $x(0) = 0$ ,  $x(0, 5\pi) = 1$  и на которой функционал

$$J(x, \dot{x}) = \int_0^{0,5\pi} (-x^2 + \dot{x}^2) dt$$

принимает экстремальное значение;

- $x(0) = 1$ ,  $x(1) = 0$  и которая минимизирует функционал

$$J(x, \dot{x}) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dt.$$

3. Для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u; \quad |u| \leq 1 \end{aligned}$$

найти управление, которое изменяет ее состояние из  $x_1(0) = x_2(0) = 1$  в конечное  $x_1(T) = x_2(T) = 0$  и при этом минимизирует функционал качества

$$J(x, u) = 0,5 \int_0^T (10x^2 + u^2) dt,$$

$T$  — свободно.

4. Определить управление, переводящее систему

$$\ddot{x} = u, \quad |u| \leq 1$$

из состояния  $x_1(0) = x_2(0) = 1$  в состояние покоя за известное время  $T$ , чтобы минимизировать функционал качества:

- $J(u) = 0,5 \int_0^T u^2 dt;$
- $J(\mathbf{x}, u) = 0,5 \int_0^T (x_1^2 + u^2) dt.$

Изобразить траектории движения системы при различных  $T$ .

5. Решить задачу максимального быстродействия для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 + u_1 - u_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 2x_2 + u_1 + u_2, \end{aligned}$$

если ограничения  $u \in U^2$  на управление задано в виде:

- $U = \{(u_1, u_2) : |u_1| + |u_2| \leq 1\},$
- $U = \{(u_1, u_2) : 0 < u_1 < 1, -1 < u_2 < 0; u_2 = u_1 - 1\}.$

6. Составить уравнение Беллмана в задаче оптимального управления нелинейной системой  $\dot{x} = \sqrt{u}$  для перевода ее из состояния  $x(0)$  в состояние  $x(T)$  так, чтобы максимизировать критерий

$$J(x, u) = \int_0^T (x - u) dt.$$

7. Используя метод Беллмана, показать, что для линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

со скалярным ограниченным управлением  $|u| \leq 1$ , оптимальное, в смысле критерия

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0,5 \int_0^T (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + r^2 u^2) dt,$$

управление для перевода системы из произвольного состояния в положение покоя принимает вид

$$u^* = \text{sat} \left( \frac{1}{r} \text{grad}^T T(\mathbf{x}) \mathbf{B} \right).$$



8. Осуществить синтез оптимальной по быстродействию системы второго порядка, если

- $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ ;
- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ ;
- $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ .

9. Построить фазовый портрет почти оптимальной системы с объектом управления  $\ddot{x}(t) = u(t)$ , если характеристика реле содержит гистерезис, а линия переключения является прямой  $x_2 = -2x_1$ . Оценить частоту и амплитуду установившихся автоколебаний. Найти потери быстродействия при достижении положения покоя.

10. Для системы с объектом управления

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 + u\end{aligned}$$

определить структуру линейного регулятора, который позволяет выполнить оптимальную стабилизацию положения равновесия системы. Построить фазовый портрет системы, если функционал качества оптимальности зависит от двух параметров.

$$J(x, u; q, r) = 0,5 \int_0^{\infty} (x_1^2 + qx_2^2 + ru^2) dt, \quad q > 0, r > 0.$$

Исследовать переходные процессы для случаев:

- $q = 1; q = 0, 1$  в зависимости от  $r$ ;
- $r = 1; r = 0, 1$  в зависимости от  $q$ .

## СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С АДАПТАЦИЕЙ

- Задачи адаптивного управления
- Экстремальные системы и регуляторы
- Идентификация объекта управления в замкнутом контуре
- Адаптивные системы с эталонной моделью

### 15.1. ЗАДАЧИ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Адаптация* как понятие теории управления обозначает процесс изменения параметров или структуры системы управления на основе данных о ее текущем состоянии с целью достижения определенных, быть может оптимальных, свойств системы при начальной неопределенности или изменяющихся внешних условиях ее функционирования.

Теория адаптивных систем управления берет свое начало в пятидесятых годах прошлого столетия как естественное развитие общей теории управления на системы, в которых необходимо поддерживать заданный уровень некоторых показателей качества в условиях, когда под действием внешних или внутренних условий характеристики системы изменяются.

Примерами таких систем являются: *дизельный привод, газотурбинная установка, реактивный двигатель, управляемый по возбуждению двигатель постоянного тока, система управления летательным аппаратом в изменяющихся аэродинамических условиях, процесс управления разогревом слитков в нагревательных колодцах, процессы управления химическими реакциями, процессы измельчения, флотации, магнитной сепарации при обогащении полезных ископаемых* и многие др.

В первых трех примерах параметры моделей систем управления запуском приводов — постоянные времени и коэффициент передачи существенно зависят от регулируемой частоты вращения вала привода, для моделей процессов управления нагревом или химических реакций характерна экстремальная зависимость управляемой переменной от параметров системы.

Для реализации процесса адаптации в системе необходимо иметь возможность: измерения характеристик процесса, влияющих на значение некоторого показателя качества процесса; оценки этого показателя; изменения параметров управляющего устройства в зависимости от вычисленного значения показателя качества. Указанные возможности позволяют реализовать адаптацию системы путем выполнения трех

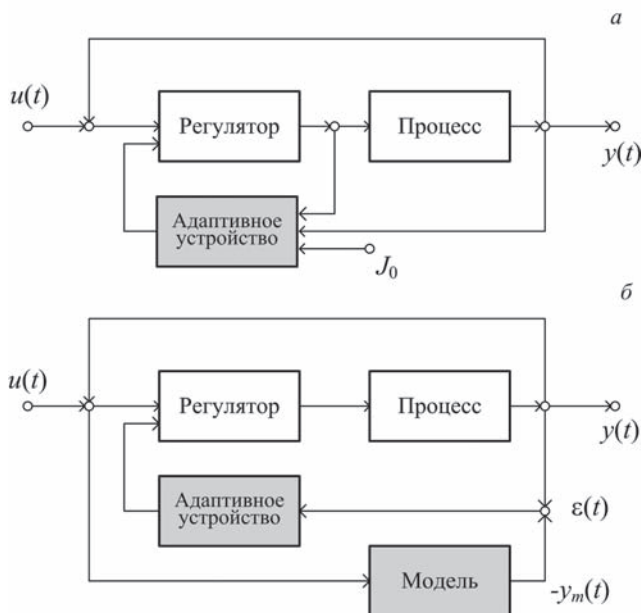


Рис. 15.1

Адаптивные системы: а — без модели, но с устройством адаптации;  
 б — с моделью в контуре адаптации.

необходимых процедур: идентификации, принятия решения и модификации. Эти процедуры определяют основные задачи синтеза систем с адаптацией:

- *задачи идентификации* — определения истинных значений параметров основной подсистемы управления;
- *задачи принятия решения* — формирования правила адаптации с использованием найденных значений;
- *задачи модификации* — реализации правила адаптации.

В структурном смысле адаптивная система содержит основную подсистему управления и подсистему адаптации, которая аппаратно или программно формирует сигнал адаптации для модифицирования основной подсистемы управления.

Разнообразие адаптивных систем управления в некотором смысле упорядочивает достаточно простая классификация, по которой будем отождествлять **адаптивные** и **самонастраивающиеся системы**, среди которых будем различать адаптивные системы с **эталонной моделью** и адаптивные системы без модели, которые могут быть замкнутыми или разомкнутыми.

Адаптивные системы без модели, содержат в контуре адаптации (рис. 15.1, а) устройства, которые выполняют функции идентификации текущего вектора параметров основной подсистемы, а затем и вектора параметров настройки регулятора.

Адаптивные системы с эталонной моделью, содержат в контуре адаптации (рис. 15.1, б) модель основной системы — объекта и регулятора, которая описывает

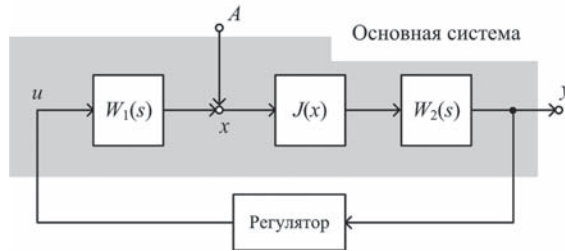


Рис. 15.2

Структура экстремальной системы управления с регулятором, реализующим метод поиска с запоминанием экстремума

эталонное движение основной системы. Модель и основная система испытывают одно и тоже входное воздействие, поэтому рассогласование реакций основной системы и ее модели характеризует меру отличия реальной системы от идеальной. Рассогласование двух движений используют в контуре адаптации для определения вектора параметров настройки регулятора основной системы.

## 15.2. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И РЕГУЛЯТОРЫ

В определенном смысле простейшими адаптивными системами являются так называемые *экстремальные самонастраивающиеся системы*, структура которых представлена на рис. 15.2. Основное предназначение таких систем состоит в том, чтобы стабилизировать координаты состояния системы относительно точки  $x^*$ , соответствующей экстремуму функции качества системы

$$J(x; \alpha, t).$$

Заметим, что функция качества  $J(x; \alpha, t)$  зависит не только от координат состояния, но и от параметров  $\alpha$  и быть может времени, иначе исчезает целесообразность экстремального управления. Цель управления достигают обычной стабилизацией относительно точки  $x^*$ . Обычно основная система, обладающая экстремальной характеристикой  $J(x; \alpha, t)$ , допускает возможность *экспериментирования* — целенаправленного изменения состояния системы путем изменения управляющего воздействия на значение пробного возмущения или специального тестового сигнала. Анализируя изменения экстремальной характеристики, или реакцию системы на эти возмущения, можно выполнить так называемое *рабочее изменение состояния системы*, приближая его точке экстремума.

Экстремальные системы различают по методам поиска и анализа результатов поиска. Поиск экстремума может быть непрерывным или дискретным, при этом пробное возмущение и рабочее движение могут совпадать, проходить параллельно или последовательно. Распространены в основном два метода анализа результатов поиска: с использованием градиента экстремальной характеристики и с запоминанием текущего отклонения реального значения и экстремума характеристики.

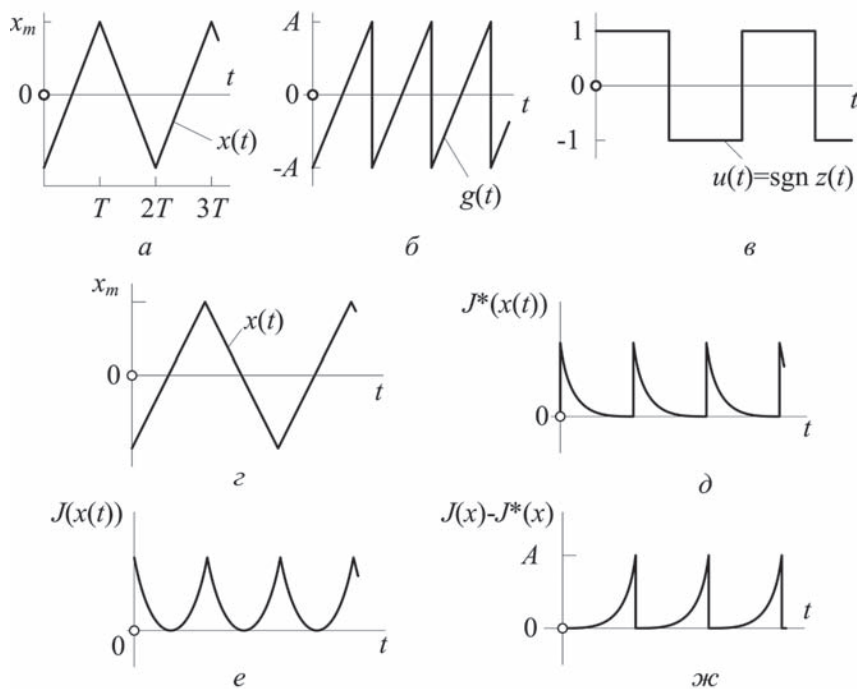


Рис. 15.3

Сигналы в экстремальной системе: а — периодический поисковый сигнал; б — изменение текущей производной по времени экстремальной характеристики в процессе поиска; в — знак разности.

Сигналы в экстремальном регуляторе с памятью: г — периодический поисковый сигнал; д — текущее изменение экстремальной характеристики в процессе поиска; е — текущее изменение экстремума, ж — текущее изменение разности сигналов.

Рассмотрим на примере системы с одномерной экстремальной характеристикой  $J(x)$  две наиболее известные структуры экстремальных регуляторов.

В регуляторах первого типа путем подачи специального периодического поискового сигнала  $x(t)$  (рис. 15.3, а) определяют текущую производную экстремальной характеристики (рис. 15.3, б)  $s(t) = \frac{d}{dt}J(x(t))$  и сигнал знака разности (рис. 15.3, в)  $z(t) = A - s(t)$ , где  $A$  — определенная величина.

Сигнал, пропорциональный разности  $z(t)$  с учетом ее знака, подают в систему через линейное динамическое звено  $W_1(p)$ , чаще всего через интегратор. Регулятор позволяет определять экстремум характеристики с точностью до небольшого периодического процесса.

Например, если в окрестности экстремума характеристика близка к квадратичной  $J(x) = kx^2$  и  $W_1(s) = \frac{1}{Ts}$ , то в системе возникают автоколебания. При этом сигнал

$$g(t) = \frac{dJ(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = \pm 2kx \left( \frac{2x_m}{T} \right). \quad (15.1)$$

Поскольку максимальное значение производной  $s(t)$  на периоде  $2T$  равно

$$A = 4k \frac{x_m^2}{T},$$

то максимальное поисковое отклонение от точки экстремума составит

$$J_m = kx_m^2 = 0,25AT.$$

Качество экстремального регулирования, определяемое значением  $J_m$ , не может быть предельно улучшено, потому что параметры  $A, T$ , хотя и устанавливаются заранее, но не могут быть выбраны очень малыми, поскольку при этом резко возрастают шумы регулятора.

В регуляторах с памятью вместо определения производной по времени используют прием запоминания текущего экстремума  $J^*(x)$ ,  $x \in [a, b]$  по правилу:

если при изменении  $x$   $J(x)$  убывает, то  $J^*(x) = J(x)$ ;

если  $J(x)$  возрастает, то  $J^*(x) = \min_{x \in [a, b]} J(x)$ .

Таким образом, применительно к характеристикам параболического вида, на падающей вплоть до нуля ветви значение  $J^*(x)$  совпадает с наименьшим значением, и затем на возрастающей ветви  $J^*(x) = 0$ . На рис. 15.3, *д, е, ж* приведены кривые, поясняющие это правило и процесс поиска минимума. Направление поиска определяет знак разности  $A - (J(x) - J^*(x))$ , где параметр  $A$  устанавливаемый заранее, определяет качество экстремального регулирования.

Экстремальное регулирование и в этом случае сопровождается автоколебаниями. К показателям качества процесса управления в экстремальных системах относят время поиска и параметры установившихся автоколебаний.

Для экстремальных систем, использующих цифровой контроллер в контуре управления, процедура поиска экстремума обычно строится на основе использования скалярных и векторных методов оптимизации. В их числе: *методы дихотомии, золотого сечения и Фибоначчи, алгоритмы градиентные, Гаусса–Зайделя, сопряженных направлений, Ньютона–Рафсона и прямые методы поиска.*

Приведем некоторые из этих алгоритмов оптимизации без детального обсуждения их эффективности и условий применения.

*Алгоритмы скалярной оптимизации* позволяют отыскать экстремум унимодальной функции на интервале  $[a, b]$ .

**Алгоритм дихотомии** задает стратегию выбора последовательности точек поиска путем деления интервала неопределенности пополам. На первом шаге интервал неопределенности — это весь отрезок, поэтому первая пара точек поиска задается в виде:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0,5(a + b - \epsilon); \\ x_2^{(1)} &= 0,5(a + b + \epsilon). \end{aligned} \quad (15.2)$$

Последующие пары определяют аналогично.

**Алгоритм Фибоначчи** определяет первую пару точек в виде:

$$x_1^{(1)} = a + (b - a) \frac{F_n}{F_{n+1}};$$

$$x_2^{(1)} = a + (b - a) \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}, \quad (15.3)$$

где  $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ;  $F_1 = F_2 = 1$  — числа Фибоначчи.

Последующий интервал неопределенности содержит одну из найденных ранее точек поиска, другую точку задают симметричной к первой относительно границы интервала.

**Алгоритм золотого сечения** определяет первую пару точек в двух золотых сечения отрезка  $[a, b]$ :

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= a + (b - a)(2 - \sigma), \\ x_2^{(1)} &= a + (b - a)(\sigma - 1), \quad \sigma = 0,5(1 + \sqrt{5}). \end{aligned} \quad (15.4)$$

Одна из этих точек в следующем интервале неопределенности вновь оказывается в золотом сечении, поэтому ей пару следует выбирать по симметрии.

Метод золотого сечения чуть менее эффективен, чем метод Фибоначчи, но значительно эффективнее метода дихотомии.

**Алгоритмы векторной оптимизации** позволяют отыскать экстремум унимодальной функции в конечномерном евклидовом пространстве.

**Алгоритм Гаусса–Зайделя** определяет последовательность точек поиска по правилу:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \lambda^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_i} J(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, m, n = 0, 1, \dots, \quad (15.5)$$

где  $m$  — размерность пространства;  $\lambda^{(n)}$  — шаг поиска.

Шаг поиска выбирают таким, чтобы минимизировать функцию  $J(\mathbf{x})$  вдоль соответствующего координатного направления. Если  $\lambda^{(n)}$  при движении по одному направлению постоянен, алгоритм называют *покоординатным спуском*.

**Градиентные алгоритмы** определяют последовательность точек поиска по правилу:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \lambda^{(n)} \nabla J(\mathbf{x}(n)), \quad (15.6)$$

где  $\lambda^{(n)}$  — шаг поиска, выбор которого определяет различные варианты алгоритма поиска.

Например, в алгоритме Коши *наискорейшего спуска*  $\lambda^{(n)}$  выбирают таким, чтобы минимизировать функцию  $J(\mathbf{x})$  вдоль найденного градиентного направления  $\nabla J(\mathbf{x}(n))$ .

**Алгоритм сопряженных направлений** определяет последовательность точек поиска по правилу:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(n+1)} &= \mathbf{x}^{(n)} - \lambda^{(n)} S(\mathbf{x}^{(n)}), \\ S(\mathbf{x}^{(0)}) &= \nabla J(\mathbf{x}^{(0)}), \\ S(\mathbf{x}^{(n)}) &= \nabla J(\mathbf{x}^{(n)}) - \beta^{(n-1)} S(\mathbf{x}^{(n-1)}), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (15.7)$$

где  $\lambda^{(n)}$  выбирают как в методе наискорейшего спуска, а

$$\beta^{(n-1)} = \frac{\|J(\mathbf{x}^{(n)})\|^2}{\|J(\mathbf{x}^{(n-1)})\|^2}. \quad (15.8)$$

Метод сопряженных направлений эффективнее градиентных методов и не на много их сложнее, более того, процесс поиска экстремума квадратичных форм не зависимо от выбора координат всегда сходится за не более чем  $m$  шагов.

**Алгоритм Ньютона–Рафсона** определяет последовательность точек поиска по правилу:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - (\nabla^2 J(\mathbf{x}^{(n)}))^{-1} \nabla J(\mathbf{x}^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (15.9)$$

где  $\nabla^2 J(\mathbf{x}^{(n)})$  — матрица Гессе функции  $J(\mathbf{x})$ , вычисленная в точке  $\mathbf{x}^{(n)}$ .

• **Прямые алгоритмы поиска** не используют производных. Вектор перехода из одной итеративной точки в другую определяют либо выбором среди альтернативных координатных направлений *наилучшего* (**алгоритм Хука–Дживса**), либо построением многомерных симплексов (**алгоритм Нелдера–Мида**), либо рандомизацией возможных направлений (**алгоритм случайного поиска**).

### Примеры:

1. Рассматривается экстремальная система управления, структура которой приведена на 15.2, где

$$W_1(s) = \frac{1}{s}, \quad J(x) = -x^2, \quad W_2(s) = \frac{1}{s+1},$$

и регулятор реализует метод поиска с запоминанием экстремума. Относительная погрешность определения экстремума не более 0,2. Построить переходный процесс стабилизации экстремума и найти параметры установившихся автоколебаний системы.

Уравнение движения системы во временной области принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -y(t) - x^2(t); \\ x(t) &= x_0 + ut, \quad u = \pm 1. \end{aligned}$$

Знак управления в силу выбранного метода поиска экстремума с запоминанием определяет ветвь экстремальной характеристики, по которой осуществляют поиск.

Пусть поиск начинают из точки  $x_0 = -2$ , расположенной на характеристике слева от экстремума. Для этого случая  $u = 1$ , иначе, когда поисковое движение начинается с правой ветви характеристики, управление принимает противоположное значение.

В общем случае уравнение движения системы имеет вид

$$\dot{y}(t) = -y(t) - (x_0 + ut)^2.$$

Найдем решение этого уравнения, а затем составим из его кусков частное движение поиска. Уравнение движения системы является уравнением первого порядка, разрешенное относительно производной, поэтому его можно представить в дифференциальной форме

$$dy + (y + (x_0 + ut)^2)dt = 0.$$

Поскольку это уравнение не удовлетворяет условиям представления в полных дифференциалах, введем интегрирующий множитель  $e^t$ , после чего исходное уравнение примет вид

$$e^t dy + e^t (y + (x_0 + ut)^2)dt = 0,$$



удовлетворяющий необходимому и достаточному условию искомого представления. Решение этого уравнения в общем виде находим интегрированием

$$\int_0^t e^t (y_0 + (x_0 + ut)^2) dt + \int_{y_0}^y e^t dy = 0.$$

Найденное решение принимает вид

$$y - y_0 + u^2 t^2 + 2u(x_0 - u)(t - 1 + e^{-t}) = 0,$$

поэтому для первого шага поиска из точки  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$  при  $u = 1$  движение системы описывает уравнение

$$y(t) = -t^2 + 6t + 6e^{-t} - 10.$$

Движение первого шага заканчивается, когда  $y(t)$  пройдет максимум на допустимую погрешность 0,2 ед. Это произойдет в момент  $t_1 = 1,3$  с.

Второй шаг поиска начинается из точки  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,3 \\ -0,9 \end{pmatrix}$  и соответствует  $u = -1$ . При этом движение системы на втором шаге поиска описывается уравнением

$$y(t) = -t^2 + 4,6t + 4,6e^{-t} - 5,5,$$

которое получено аналогично. Процесс вычисления следует продолжить до тех пор, пока будет ощутимо допустимое различие в результатах. Процесс поиска заканчивается установлением устойчивых автоколебаний, которые описывают уравнением

$$y(x) = -(x - u)^2 + 5e^{-ux} + 0,583, \quad u = \pm 1.$$

На рис. 15.4 представлены: график изменения выходной координаты экстремальной системы  $y(t)$  и переходная фазовая кривая  $y(x)$ , по которым можно определить параметры установившихся автоколебаний: амплитуду  $x_m = 1,15$  и частоту  $\omega_a = 2,73 \text{ с}^{-1}$ , поскольку период автоколебаний равен  $2x_m$ .

**2.** Выполнить, используя алгоритм золотого сечения, несколько шагов одномерного поиска максимума функции

$$J(x) = -\frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

на интервале  $[0,8 \quad 1,7]$ .

На первом шаге поиска:  $a = 0,8$ ;  $b = 1,7$ ;  $(b - a) = 0,9$ . Поэтому

$$x_1^{(1)} = a + (b - a)(2 - \sigma) = 1,144;$$

$$x_2^{(1)} = a + (b - a)(\sigma - 1) = 1,356,$$

$$\sigma = 1,618.$$

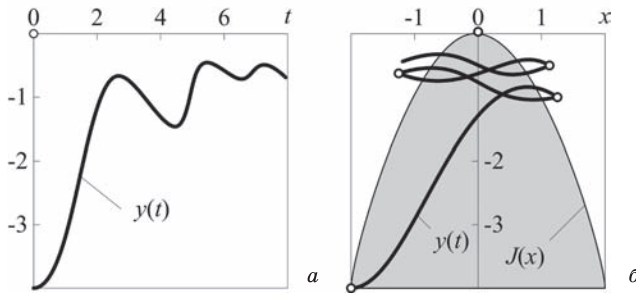


Рис. 15.4

Процесс поиска экстремума в системе: а — график изменения выходной координаты экстремальной системы; б — движение поиска на экстремальной характеристике с выходом на автоколебания вокруг экстремума.

В этих точках функция  $J(x)$  принимает значения

$$J(x_1^{(1)}) = 0,122; \quad J(x_2^{(1)}) = 0,211.$$

Интервал неопределенности сужается до  $[1,144; 1,7]$  и его длина оказывается равной 0,556.

На втором шаге поиска  $a = 1,144$ ;  $b = 1,7$ ;  $(b - a) = 0,556$ , поэтому

$$x_1^{(2)} = 1,356; \quad x_2^{(2)} = 1,488.$$

В этих точках функция  $J(x)$  принимает значения

$$J(x_1^{(2)}) = 0,211 \text{ и } J(x_2^{(2)}) = 0,214.$$

Следовательно, интервал неопределенности оказывается  $[1,356; 1,7]$ , а его длина уменьшается до 0,344.

На третьем шаге поиска  $a = 1,356$ ;  $b = 1,7$ ;  $(b - a) = 0,344$ , поэтому

$$x_1^{(3)} = 1,488; \quad x_2^{(3)} = 1,569.$$

В этих точках функция  $J(x)$  принимает значения

$$J(x_1^{(3)}) = 0,214 \text{ и } J(x_2^{(3)}) = 0,198.$$

Интервал неопределенности сужается до  $[1,356; 1,569]$ , а его длина оказывается равной 0,213.

Процедуру поиска следует продолжать до достижения заданной точности, которую можно оценивать модулем разности

$$|J(x_1^{(k)}) - J(x_2^{(k)})|$$

или длиной интервала неопределенности.

3. Выполнить, используя некоторые алгоритмы векторной оптимизации, один шаг поиска минимума функции

$$J(\mathbf{x}) = x_1^2 + 0,5x_2^2 + x_3^2$$

из начальной точки  $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Воспользуемся *алгоритмом наискорейшего спуска*.

Найдем текущий вектор градиента

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

и его значение в начальной точке  $\nabla J(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ .

Чтобы найти точку  $\mathbf{x}^{(1)}$ , необходимо выбрать  $\lambda(0)$ . Найдем значение этого параметра так, чтобы минимизировать функцию  $J(\lambda; \mathbf{x}^0)$  по  $\lambda$  вдоль направления найденного градиента  $\nabla J(\mathbf{x}^0)$ .

Воспользуемся необходимым условием минимума

$$\frac{d}{d\lambda}(J(\mathbf{x}^0) - \nabla J(\mathbf{x}^0)) = \frac{d}{d\lambda}((1 - 2\lambda)^2 + 2(-2 + 2\lambda)^2 + (3 - 6\lambda)^2) = 0.$$

Откуда следует, что  $\lambda^{(0)} = 0,583$ , поэтому  $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -0,167 \\ -0,833 \\ -0,500 \end{pmatrix}$ .

В этой точке значение  $J(\mathbf{x}^{(1)}) = 0,625$ , тогда как в начальной точке поиска  $J(\mathbf{x}^0) = 12$ .

Воспользуемся теперь *алгоритмом Ньютона-Рафсона*.

Построим матрицу Гессе целевой функции

$$\nabla^2 J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

которая оказалась постоянной для любой точки поиска. Найдем вектор перехода из  $\mathbf{x}^{(0)}$  для первого шага процедуры поиска

$$-(\nabla^2 J(\mathbf{x}^{(0)}))^{-1} \nabla J(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому  $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Минимум найден за один шаг!

### 15.3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ В ЗАМКНУТОМ КОНТУРЕ

Идентификация является одной из главных процедур адаптации, предназначение которой состоит в определении отдельных характеристик и параметров системы, характеристик возмущений и оценок показателей качества управляемого процесса. Результаты идентификации являются основанием для перестройки структуры и коэффициентов регулятора с целью улучшения процесса управления.

Простейшая идентификация в адаптивных системах реализуется в виде прямого или косвенного измерения параметров, но все же главная задача идентификации в адаптивных системах это определение параметров основной системы по входным, выходным переменным и координатам состояния.

Вот пример идентификации коэффициента усиления  $k$  модели инерционного звена  $T\dot{y} + y = ku$ , если известна постоянная времени  $T$  этой модели.

Искомое значение коэффициента усиления находят после интегрирования по времени модели звена

$$k = \frac{1}{\int_0^t u(t)dt} \left( T(y(t) - y(0)) + \int_0^t y(t)dt \right). \quad (15.10)$$

Устройство идентификации реализует эту формулу.

В случае идентификации более чем одного параметра в динамических моделях дробно-рационального вида используют специальные фильтры.

Например, пусть передаточная функция объекта известна с точностью до двух параметров:

$$W(s; a_1, a_2) = \frac{1}{N(s)}; \quad N(s) = s^2 + a_1s + a_2. \quad (15.11)$$

Подключим к выходу и входу этого звена, как показано на рис. 15.5, две пары произвольных фильтров с передаточными функциями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_1(s)}, \quad F_1(s) &= s^2 + \alpha_{11}s + \alpha_{21}; \\ \frac{1}{F_2(s)}, \quad F_2(s) &= s^2 + \alpha_{12}s + \alpha_{22}. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Найдем взаимосвязь выходных сигналов фильтров:

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{U(s)}{N(s)F_1(s)}; \\ U_1(s) &= \frac{U(s)}{F_1(s)} - Y(s); \\ Y(s) &= \frac{U(s)}{N(s)}, \end{aligned} \quad (15.13)$$

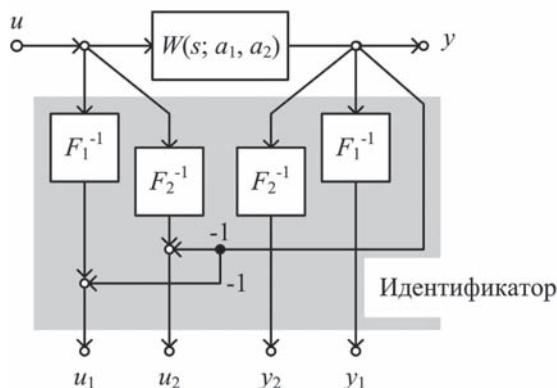


Рис. 15.5

Система идентификации более чем одного параметра с использованием специальных фильтров

поэтому

$$U_1(s) = Y_1(s)(N(s) - F_1(s)) = Y_1(s)((a_1 - \alpha_{11})s + (a_2 - \alpha_{21})).$$

Откуда находим, что

$$u_1(t) = (a_1 - \alpha_{11})\dot{y}_1(t) + (a_2 - \alpha_{21})y_1(t).$$

Аналогично находим

$$u_2(t) = (a_1 - \alpha_{12})\dot{y}_2(t) + (a_2 - \alpha_{22})y_2(t).$$

Сигналы  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  измеряют, а  $\dot{y}_1(t)$ ,  $\dot{y}_2(t)$  вычисляют, поэтому система двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров  $a_1, a_2$  разрешима.

Для идентификации параметров систем в темпе реального времени путем цифровой обработки данных, непосредственно поступающих от системы используют *рекуррентные алгоритмы оценивания*.

Пусть дискретная идентифицируемая система представлена своей линейной разностной моделью

$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_ny(k-n) = b_1u(k-1) + \dots + b_nu(k-n). \quad (15.14)$$

Задача идентификации состоит в определении коэффициентов  $a_i$ ,  $b_i$  этой модели по результатам  $\{y(k)\}$ ,  $\{u(k)\}$  измерений входа и выхода.

Пусть на  $k$ -м такте по результатам измерений входа и выхода вычислены оценки коэффициентов  $\{\hat{a}_i(k-1)$ ,  $\hat{b}_i(k-1)\}$ , подставим эти оценки в модель системы

$$\begin{aligned} y(k) + \hat{a}_1(k-1)y(k-1) + \dots + \hat{a}_n(k-1)y(k-n) = \\ = \hat{b}_1(k-1)u(k-1) + \dots + \hat{b}_n(k-1)u(k-n) + \varepsilon(k). \end{aligned}$$

Здесь  $\varepsilon(k)$  введена в уравнение для того, чтобы учесть ошибки измерений и вычислений оценок. Выражение

$$\begin{aligned} -\hat{a}_1(k-1)y(k-1) - \dots - \hat{a}_n(k-1)y(k-n) + \\ + \hat{b}_1(k-1)u(k-1) + \dots + \hat{b}_n(k-1)u(k-n) = y(k|k-1) \end{aligned}$$

по смыслу является предсказанным в момент  $(k-1)$  значением выхода  $y(k)$ .

Введем матричную запись основных соотношений, для чего обозначим векторы измерений и оценок параметров:

$$\psi(k) = \begin{pmatrix} -y(k-1) \\ -y(k-2) \\ \vdots \\ -y(k-n) \\ u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-n) \end{pmatrix}; \quad \alpha(k-1) = \begin{pmatrix} a_1(k-1) \\ a_2(k-1) \\ \vdots \\ a_n(k-1) \\ b_1(k-1) \\ b_2(k-1) \\ \vdots \\ b_n(k-1) \end{pmatrix}. \quad (15.15)$$

Теперь

$$\begin{aligned} y(k|k-1) &= \psi^T(k)\alpha(k-1), \\ y(k) &= \psi^T(k)\alpha(k-1) + \varepsilon(k). \end{aligned} \quad (15.16)$$

Неизвестный вектор оценок параметров находим из рекуррентного уравнения

$$\alpha(k+1) = \alpha(k) + \eta(k)(y(k+1) - \psi^T(k+1)\alpha(k)), \quad \alpha(0) = 0,$$

где вектор  $\eta(k)$ , называемый *вектором коррекции*, определяет соотношения

$$\begin{aligned} \eta(k) &= \frac{\mathbf{P}(k)\psi(k+1)}{\psi^T(k+1)\mathbf{P}(k)\psi(k+1) + 1}; \\ \mathbf{P}(k) &= (\mathbf{E} - \eta(k-1)\psi^T(k))\mathbf{P}(k-1), \quad \mathbf{P}(0) = r\mathbf{E}, \end{aligned} \quad (15.17)$$

где  $r$  — произвольное достаточно большое число;  $\mathbf{E}$  — единичная матрица.

Заметим, что описанный рекуррентный алгоритм, работает и в том случае, когда измерения сопровождаются шумами, при этом найденные оценки обладают наименьшей дисперсией, поскольку основное рекуррентное соотношение получено по методу наименьших квадратов.

**Пример.** Выполнить идентификацию модели объекта первого порядка с двумя параметрами

$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1).$$

Вектор оценок параметров и вектор измерений принимают вид соответственно:

$$\hat{\alpha}(k) = \begin{pmatrix} \hat{a}(k) \\ \hat{b}(k) \end{pmatrix};$$

$$\psi(k) = \begin{pmatrix} -y(k-1) \\ u(k-1) \end{pmatrix}.$$

Пусть на момент  $k$  проведены измерения входа и выхода  $\{y(k), u(k)\}$ , найдем ошибку оценивания

$$\varepsilon(k) = y(k) - \psi^T(k)\hat{\alpha}(k)$$

и сами оценки параметров

$$\hat{\alpha}(k) = \hat{\alpha}(k-1) + \eta(k-1)\varepsilon(k), \quad \hat{\alpha}(0) = 0.$$

Найдем вектор коррекции  $\eta(k-1)$ , для чего определим сначала

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k)\psi(k+1) &= \begin{pmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y(k) \\ u(k) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -p_{11}(k)y(k) + p_{12}(k)u(k) \\ -p_{21}(k)y(k) + p_{22}(k)u(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1(k) \\ \theta_2(k) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Затем определим

$$\psi^T(k+1)\mathbf{P}(k)\psi(k+1) = \begin{pmatrix} -y(k) & u(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1(k) \\ \theta_2(k) \end{pmatrix} = \omega(k),$$

поэтому

$$\eta(k-1) = \begin{pmatrix} \theta_1(k) \\ \theta_2(k) \end{pmatrix} \frac{1}{\omega(k) + 1}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1) &= (\mathbf{E} - \eta(k)\psi^T(k+1))\mathbf{P}(k) = \\ &= \mathbf{P}(k) - \eta(k)(\psi^T(k+1)\mathbf{P}(k)) = \mathbf{P}(k) - \eta(k)(\theta_1(k)\theta_2(k)). \end{aligned}$$

В начальный момент полагаем, что

$$\hat{\alpha}(0) = \begin{pmatrix} \hat{a}(0) \\ \hat{b}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}(0) = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

#### 15.4. АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛЬЮ

Структура адаптивной системы с эталонной моделью представлена на рис. 15.1, б. Модель в такой структуре предназначена для имитации идеального движения системы. Отклонение

$$\varepsilon(t) = y_m(t) - y(t)$$

реального движения  $y(t)$  от идеального  $y_m(t)$  используют в замкнутом контуре для адаптивной подстройки регулятора основной системы.

Показатель качества управления  $J(\varepsilon)$  может быть экстремальным или монотонным, в первом случае настройка регулятора выполняется по принципам экстремального регулирования, во втором случае используется принцип управления по отклонению. Закон адаптации и вместе с ним параметры регулятора выбирают так, чтобы обеспечить всей системе асимптотическую устойчивость

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0.$$

Для этого используются различные методы анализа устойчивости, в том числе методы А. М. Ляпунова, В. -М. Пóпова.

**Пример.** Идентифицировать систему, которая содержит объект регулирования с передаточной функцией

$$W_0(s; k_0) = \frac{k_0}{Ts + 1}.$$

Параметр  $k_0$  передаточной функции объекта изменяется в широком диапазоне.

Для адаптивной компенсации изменения коэффициента передачи объекта регулирования выбираем регулятор с передаточной функцией

$$W_p(s; \beta) = \beta(t).$$

Эталонную модель принимаем в виде

$$W_m(s; k_m) = \frac{k_m}{Ts + 1}.$$

Закон адаптации будем выбирать из условия

$$\zeta(t) \rightarrow 0, \quad \zeta(t) = k_m - k_0\beta(t)$$

и так, чтобы обеспечить всей системе асимптотическую устойчивость по Ляпунову.

Определим ошибку адаптации  $\varepsilon(t) = y_m(t) - y(t)$  и найдем ее модель. Ясно, что:

$$\begin{aligned} T\dot{y}(t) + y(t) &= k_0\beta(t)u(t); \\ T\dot{y}_m(t) + y_m(t) &= k_mu(t). \end{aligned}$$

Откуда следует, что модель ошибки адаптации принимает вид

$$T\dot{\varepsilon}(t) + \varepsilon(t) = \zeta(t)u(t).$$

Вся система будет асимптотически устойчива, если модель ошибки адаптации будет асимптотически устойчивой. Следуя прямому методу Ляпунова, используем положительно определенную квадратичную форму вида

$$V(\varepsilon, \zeta) = 0,5(\varepsilon^2(t) + \zeta^2(t))$$

в качестве функции Ляпунова для оценки устойчивости модели ошибки адаптации.



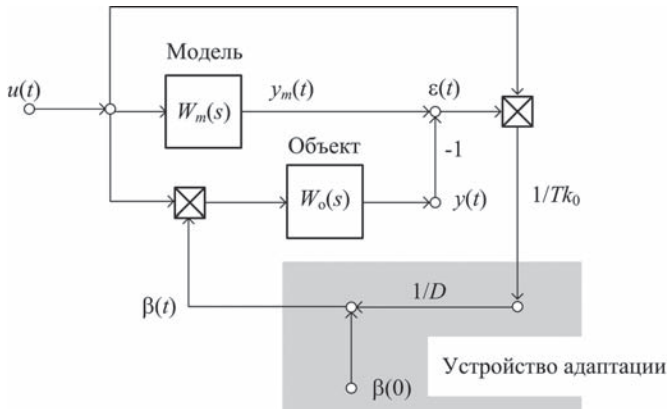


Рис. 15.6  
Синтезированная адаптивная система

Полная производная по времени в силу модели ошибки адаптации принимает вид:

$$\frac{d}{dt}V(\varepsilon, \zeta) = \varepsilon(t)\dot{\varepsilon}(t) + \zeta(t)\dot{\zeta}(t) = -\frac{\varepsilon^2(t)}{T} + \zeta(t)\dot{\zeta}(t)$$

и будет отрицательно определенной, если, например,

$$\dot{\zeta}(t) = -\frac{\varepsilon(t)u(t)}{T}.$$

Воспользуемся этим условием, чтобы найти закон подстройки регулятора для придания адаптивных свойств системе. Предположим, что параметр  $k_0$  квазистационарен, тогда производная

$$\dot{\zeta}(t) = \frac{d}{dt}(k_m - k_0(t)) = -k_0\dot{\beta}(t),$$

поэтому

$$\dot{\beta}(t) = \frac{\varepsilon(t)u(t)}{Tk_0}.$$

Искомый закон адаптации принимает вид

$$\beta(t) = \beta(0) + \frac{1}{Tk_0} \int_0^t \varepsilon(t)u(t)dt.$$

На рис. 15.6 приведена структура синтезированной адаптивной системы. Использование микропроцессорных вычислительных средств в контуре управления позволяет реализовывать алгоритмы адаптации, требующие сложных расчетов, например, вычисление дополнительного управляющего сигнала  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t), \varepsilon(t))$  как функции сигналов входа, выхода и рассогласования. В этом случае динамика основной

системы описывается линейной моделью

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + g\mathbf{z}(t), \quad (15.18)$$

эталонная модель системы — уравнением

$$\dot{\mathbf{y}}_m(t) = \mathbf{A}_m\mathbf{y}_m(t) + \mathbf{B}_m\mathbf{u}(t). \quad (15.19)$$

Представим динамическую модель рассогласования  $\varepsilon(t) = \mathbf{y}_m(t) - \mathbf{y}(t)$  в виде

$$\dot{\varepsilon}(t) = \mathbf{A}_m(t)\varepsilon(t) - \Delta\mathbf{A}\mathbf{y}(t) - \Delta\mathbf{B}\mathbf{u}(t) - g\mathbf{z}(t), \quad (15.20)$$

где  $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{A}(t) - \mathbf{A}_m$ ;  $\Delta\mathbf{B} = \mathbf{B}(t) - \mathbf{B}_m$ .

Цель синтеза адаптивной системы состоит в том, чтобы путем подбора дополнительного управляющего сигнала  $\mathbf{z}(t)$ , обеспечить асимптотическую устойчивость всей системы.

Будем искать функцию Ляпунова в виде положительно определенной квадратичной формы от рассогласования

$$V(\varepsilon) = \varepsilon^T(t)\mathbf{P}\varepsilon(t), \quad (15.21)$$

полная производная которой в силу системы оказывается отрицательно определенной.

$$\frac{d}{dt}V(\varepsilon) = \varepsilon^T(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\varepsilon - 2\varepsilon^T\mathbf{P}(\Delta\mathbf{A}\mathbf{y} - \Delta\mathbf{B}\mathbf{u} - g\mathbf{z}(t)). \quad (15.22)$$

Поскольку матрица  $\mathbf{P}$  является положительно определенной, то и матрица  $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}$  также положительно определенная, поэтому для отрицательной определенности  $\dot{V}$  достаточно, чтобы скалярная функция

$$\varepsilon^T\mathbf{P}(\Delta\mathbf{A}\mathbf{y} + \Delta\mathbf{B}\mathbf{u} + g\mathbf{z}(t)) \geq 0. \quad (15.23)$$

Из этого условия находят искомое выражение для дополнительного управляющего сигнала  $\mathbf{z}(t)$ .

К примеру, рассмотрим результат синтеза адаптивной системы стабилизации перегрузки при различных режимах продольного движения самолета.

Линейная модель динамики системы стабилизации перегрузки, которая включает модель динамики движения самолета, сервопривода и модели корректирующих звеньев имеет седьмой порядок и меняется в зависимости от режима полета. Эталонную модель системы строят по номинальному режиму полета, считая ее системой третьего порядка.

Контур адаптации содержит микропроцессор для расчета управляющего сигнала  $\mathbf{z}(t)$ , который подают дополнительно с основным на вход сервомеханизма.

Выражение для дополнительного управляющего сигнала имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) = & ((8, 16 \ 0, 51 \ 3, 64) |\varepsilon(t)| + (8, 69 \ 1, 44 \ 12, 93) |y(t)|) \times \\ & \times \operatorname{sgn}(3, 52 \ 1, 09 \ -1, 52) \varepsilon(t), \end{aligned}$$

где вектор рассогласования  $\epsilon(t)$  определяют тремя координатами эталонной модели и соответствующими им  $y(t)$  — реальными координатами основной системы.

Использование контура адаптации позволило практически исключить различие в переходных процессах стабилизации на различных режимах полета.

Рассмотренные методы позволяют проектировать адаптивные системы со свойством локальной нечувствительности к нестационарности модели, к ограниченным возмущениям и помехам. Адаптивные системы существенно нечувствительные к изменению модели, возмущениям и помехам в современной теории управления называют *робастными*, или грубыми.

Свойство робастности есть способность системы сохранять свои свойства и показатели качества в условиях достаточно больших параметрических, структурных и сигнальных возмущениях. Методы анализа и синтеза робастных систем представляют собой актуальную область современных исследований теории управления.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

- Элементы матричного анализа
- Функциональные преобразования
- Характеристики случайных процессов
- Программные средства моделирования

### А.1. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА

#### А.1.1. Основные понятия и операции

*Матрицей* размера  $m \times n$  называют упорядоченную совокупность  $mn$  чисел  $a_{ij}$  действительных или комплексных, помещенных в прямоугольную таблицу из  $m$  строк и  $n$  столбцов

$$\mathbf{A} = (a_{ij}; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}) = (a_{ij})_{m \times n}. \quad (\text{A.1})$$

Числа  $a_{ij}$  называются *элементами матрицы*. Элемент  $a_{ij}$  расположен на пересечении  $i$  строки и  $j$  столбца матрицы. Если  $m = n$ , то матрицу называют квадратной порядка  $n$ , *вектор-столбец* является матрицей размера  $m \times 1$ , *вектор-строка* является  $1 \times n$  матрицей, *скаляр* является  $1 \times 1$  матрицей.

Квадратную матрицу, в которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, называют *диагональной*

$$\mathbf{M} = \text{diag}(a_{11} a_{22} \dots a_{nn}). \quad (\text{A.2})$$

Диагональную матрицу вида  $\mathbf{M} = \text{diag}(a_{11} a_{22} \dots a_{nn})$  называют *единичной*.

Транспонированная к  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$  матрица имеет вид

$$\mathbf{A}^T = (a_{ji})_{n \times m}.$$

Квадратная матрица называется *симметрической*, если  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ , *кососимметрической*, если  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ .

Квадратную матрицу называют *вырожденной*, *особенной*, или *сингулярной*, если ее определитель равен нулю, в противном случае, когда  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , матрицу называют невырожденной, неособенной, или несингулярной.

*Алгебраическим дополнением*  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы  $\mathbf{A}$  называют определитель матрицы, полученной вычеркиванием  $i$  строки и  $j$  столбца и умноженный на  $(-1)^{i+j}$ .

Определитель матрицы можно вычислить по формуле разложения Лапласа:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}. \quad (\text{A.3})$$

Присоединенной матрицей для квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  называют матрицу  $\text{adj } \mathbf{A}$ , полученную путем замены каждого элемента его алгебраическим дополнением и последующим транспонированием.

Для неособенной матрицы  $\mathbf{A}$  существует единственная обратная матрица  $\mathbf{A}^{-1}$ , которую находят по выражению

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}. \quad (\text{A.4})$$

Простейшими операциями над матрицами являются операции сложения и умножения матриц, умножение матрицы на число.

Две матрицы одного размера *равны*, если равны их соответствующие элементы.

*Сложение матриц* — это поэлементное сложение матриц одинакового размера

$$\mathbf{A}_{m \times n} + \mathbf{B}_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}. \quad (\text{A.5})$$

*Умножение матриц* выполняют по правилу

$$\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{B}_{n \times p} = \mathbf{C}_{m \times p}, \quad \mathbf{C} = (c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}), \quad (\text{A.6})$$

где  $a_{ik}, b_{kj}$  — элементы матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  соответственно.

Операция умножения определяется только для *согласованных матриц*, когда число столбцов левого сомножителя совпадает с числом строк правого сомножителя.

Умножение матрицы на число определяют как  $\beta \mathbf{A} = (\beta a_{ij})$ .

Основные свойства операций:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A}; \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}); \\ (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} &= \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}); \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} &= \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

В общем случае  $\mathbf{A}\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\mathbf{A}$ ,

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{A} &= \mathbf{A}\alpha, \\ (\alpha + \beta)\mathbf{A} &= \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

кроме того, справедливо:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T; \\ (\mathbf{A}\mathbf{B})^T &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}; \\ (\mathbf{A}^T)^{-1} &= (\mathbf{A}^{-1})^T.\end{aligned}\tag{A.9}$$

Матрицу  $\mathbf{A}$  называют *ортогональной*, если  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$ .

*Скалярное произведение* двух векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  в матричной записи определяется как  $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}$ . Два вектора называют *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

*Диадическое произведение* двух векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  определяется как  $\mathbf{x}\mathbf{y}^T$ . Если векторы одной размерности, то диадическое произведение является квадратной матрицей.

### А.1.2. Характеристические числа матрицы

Для квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  порядка  $n$  функция

$$\varphi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\tag{A.10}$$

относительно параметра  $\lambda$  есть многочлен степени  $n$ , который называют *характеристическим многочленом матрицы  $\mathbf{A}$* .

Корни характеристического многочлена называются *собственными* или *характеристическими числами* матрицы  $\mathbf{A}$ .

Собственные числа матрицы могут быть действительными или комплексными, простыми или кратными. Симметрическая матрица с действительными элементами имеет только действительные собственные числа. Совокупность всех собственных чисел матрицы называют *спектром матрицы*.

Сумму диагональных элементов квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  называют *следом матрицы* и обозначают  $\text{Tr}\mathbf{A}$ .

Справедливо:

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \text{Tr}\mathbf{A} + \text{Tr}\mathbf{B}, \\ \text{Tr}(\mathbf{AB}) &= \text{Tr}(\mathbf{BA}).\end{aligned}\tag{A.11}$$

След диадического произведения векторов одной размерности совпадает со скалярным произведением этих векторов

$$\text{Tr}(\mathbf{x}\mathbf{y}^T) = \mathbf{x}^T\mathbf{y}.\tag{A.12}$$

*Рангом матрицы  $\mathbf{A}$*  называют наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы и обозначают  $\text{rank}\mathbf{A}$ . Квадратная матрица порядка  $n$  является невырожденной в том и только в том случае, если  $\text{rank}\mathbf{A} = n$ .

Две квадратные матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  одинаковых размеров называют *подобными*, если существует такая невырожденная матрица  $\mathbf{P}$ , что

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}.\tag{A.13}$$

Подобные матрицы имеют одинаковый след, ранг, определитель и характеристические числа.

### А.1.3. Линейные и квадратичные формы

Матричная запись вектора принята в виде

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

матрицы-столбца, поэтому преобразование вектора  $\mathbf{x}$  в вектор  $\mathbf{y}$ , осуществляемое матрицей  $\mathbf{A}$ , записывается в виде  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ .

Выражение  $L(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x}$  называют *линейной формой* вектора  $\mathbf{x}$ . В скалярной записи линейная форма имеет вид

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j. \quad (\text{A.14})$$

Матрица  $\mathbf{C} = (c_j)_{1 \times n}$  — матрица-строка.

Выражение  $G(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$  называется *квадратичной формой* вектора  $\mathbf{x}$ . В скалярной записи квадратичная форма имеет вид

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j, \quad (\text{A.15})$$

Матрица  $\mathbf{Q}$  является симметрической.

Квадратичная форма считается *положительно определенной*, когда

$$G(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad G(\mathbf{0}) = 0. \quad (\text{A.16})$$

Квадратичная форма считается *положительно полуопределенной*, когда

$$G(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad G(\mathbf{0}) = 0. \quad (\text{A.17})$$

Аналогично определяется отрицательная определенность квадратичной формы.

Свойство положительной определенности квадратичной формы обнаруживает необходимый и достаточный признак.

**Критерий Сильвестра** (*G. Sylvester*, 1852). *Квадратичная форма  $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$  положительно определенная, если все главные миноры — определители главной диагонали матрицы  $\mathbf{Q}$  — положительны.*

*Квадратичная форма  $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$  отрицательно определенная, если знаки главных миноров матрицы  $\mathbf{Q}$  — чередуются, причем первый минор отрицателен.*

*Квадратичная форма  $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$  положительно полуопределенная, если главные миноры матрицы  $\mathbf{Q}$  — не отрицательны.*

**А.1.4. Функции от матриц**

Многочленом степени  $n$  от матрицы  $\mathbf{A}$  называют выражение

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = a_0 \mathbf{A}^n + a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_{n-1} \mathbf{A} + a_n \mathbf{E}, \quad (\text{A.18})$$

экспоненциалом матрицы  $\mathbf{A}$  называют степенной ряд

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots, \quad (\text{A.19})$$

который сходится абсолютно и равномерно.

**Теорема Гамильтона–Кэли** (*W. Hamilton, A. Cayley, 1841*). Любая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению.

Если  $\varphi_{\mathbf{A}}(\lambda)$  — характеристический многочлен квадратной матрицы  $\mathbf{A}$ , то  $\varphi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = 0$ .

Дифференцирование и интегрирование матриц по скалярному параметру, например по времени, или векторному аргументу выполняется по обычным правилам, но с учетом порядка следования и условий согласованности произведения матриц:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) &= \left( \frac{d}{dt} a_{ij}(t) \right); \\ \int \mathbf{A}(t) dt &= \left( \int a_{ij}(t) dt \right); \\ \frac{d}{dt} (\mathbf{A}(t) \mathbf{B}(t)) &= \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt}; \\ \frac{d}{d\mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}) &= \mathbf{A} \mathbf{y}; \\ \frac{d}{d\mathbf{y}} (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}) &= \mathbf{A}^T \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Дифференцирование скалярной функции  $f(\mathbf{x})$  по векторному аргументу  $\mathbf{x}$  определяется как градиент этой функции

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \text{grad} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}). \quad (\text{A.21})$$



Вторая производная скалярной функции  $f(\mathbf{x})$  по векторному аргументу  $\mathbf{x}$  представляется  $n \times n$  симметричной матрицей Гессе

$$H(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} = \left( \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \nabla f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \nabla f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \nabla f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \nabla^2 f(\mathbf{x}). \quad (\text{A.22})$$

Дифференцирование векторной функции

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

по векторному аргументу  $\mathbf{x}$  определяется матрицей Якоби:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}) &= \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = (\nabla f_1(\mathbf{x}) \quad \nabla f_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \nabla f_n(\mathbf{x}))^T = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Линейное представление скалярной функции векторного аргумента  $f(\mathbf{x})$  на основе разложения в ряд Тейлора в локальной окрестности вектора  $\mathbf{x}^0$  имеет вид:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \nabla^T f(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0). \quad (\text{A.24})$$

Линейное представление векторной функции векторного аргумента  $F(\mathbf{x})$  на основе разложения в ряд Тейлора в локальной окрестности вектора  $\mathbf{x}^0$  имеет вид:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= F(\mathbf{x}^0) + \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = \\ &= F(\mathbf{x}^0) + (\nabla f_1(\mathbf{x}^0), \nabla f_2(\mathbf{x}^0), \dots, \nabla f_n(\mathbf{x}^0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0). \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

### А.1.5. Нормы векторов и матриц

*Норма вектора* является обобщением понятия модуля числа. Норма вектора позволяет сравнивать длины векторов, определять расстояния между ними, выполнять оценки, формировать критерии.

Нормой вектора  $\mathbf{x}$  называют действительное число, обозначаемое  $\|\mathbf{x}\|$ , которое обладает свойствами:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| > 0, \quad \mathbf{x} \neq 0; \quad \|0\| = 0; \\ \|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|; \\ \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

для любых векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  и чисел  $\alpha$ . Третье свойство называют *аксиомой треугольника*.

Нормы вектора могут задаваться различными способами. Общий вид нормы вектора  $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$  имеет так называемую *норму Гёльдера*:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (\text{A.27})$$

Наиболее известны три гёльдеровы нормы:

при  $p = 1$  норма Чебышева, равная сумме модулей его координат;

при  $p = 2$  имеем *евклидову норму* — корень квадратный из суммы квадратов координат;

при  $p \rightarrow \infty$  норма вектора равна максимуму модулей координат вектора:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i|; \\ \|\mathbf{x}\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}; \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Вектор, норма которого равна единице, называют *нормированным*. Любой ненулевой вектор  $\mathbf{x}$  можно нормировать, разделив этот вектор на его же норму:

$$\forall \mathbf{x}, \quad \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\| = 1.$$

Если под нормой вектора понимать его длину, то расстояние между векторами  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  совпадает с нормой разности этих векторов.

*Нормой матрицы*  $\mathbf{A}$  называется вещественное число  $\|\mathbf{A}\|$ , которое обладает свойствами:

$$\|\mathbf{A}\| > 0, \quad \mathbf{A} \neq 0; \quad \|0\| = 0;$$

$$\begin{aligned} \|\alpha \mathbf{A}\| &= |\alpha| \|\mathbf{A}\|; \\ \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| &\leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|; \\ \|\mathbf{AB}\| &\leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \end{aligned} \tag{A.29}$$

для любых матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и чисел  $\alpha$ .

Для произвольной  $m \times n$  матрицы  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  ее норма может быть вычислена по одной из формул:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|; & \|\mathbf{A}\|_1 &= \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|; \\ \|\mathbf{A}\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}; \\ \dots & \\ \|\mathbf{A}\|_\infty &= \sqrt{mn} \max_{i,j} |a_{ij}|. \end{aligned} \tag{A.30}$$

Норму  $\|\mathbf{A}\|_2$  называют евклидовой нормой матрицы.

**Примеры:**

1. Найти собственные числа матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен матрицы имеет вид

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 2 & -3 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -3 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Спектр собственных значений этой матрицы содержит три простых корня:  $\{1, -2, 3\}$ .

2. Определить ранг матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Наибольшая квадратная подматрица имеет порядок равный трем. Все подматрицы третьего порядка имеют нулевой определитель, среди квадратных подматриц второго порядка есть невырожденные. Значит ранг матрицы равен двум.

3. Найти для матрицы второго порядка общего вида

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

характеристический многочлен и обратную матрицу.

Характеристический многочлен матрицы представим в виде

$$\varphi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - (\text{Tr}\mathbf{A})\lambda + \det\mathbf{A},$$

а обратная матрица равна

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

4. Для матрицы порядка  $n$  записать общий вид характеристического многочлена

$$\varphi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

где  $a_1 = -\text{Tr}\mathbf{A}$ ,  $a_n = (-1)^n \det\mathbf{A}$ , а это значит, что

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Tr}\mathbf{A}, \quad \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det\mathbf{A}.$$

5. Для матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

используя теорему Гамильтона–Кэли вычислить ее степени и обратную.

Характеристический многочлен матрицы имеет вид

$$\varphi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 2.$$

Согласно теореме Гамильтона–Кэли, справедливо равенство

$$\varphi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 2\mathbf{E} = 0,$$

поэтому  $\mathbf{A}^2 = 5\mathbf{A} - 2\mathbf{E}$ , а значит

$$\mathbf{A}^3 = 5\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} = 5(5\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) - 2\mathbf{A} = 23\mathbf{A} - 10\mathbf{E}, \dots$$

Найдем обратную матрицу, для этого умножив исходное тождество на  $\mathbf{A}^{-1}$ , получим

$$\mathbf{A} - 5\mathbf{E} + 2\mathbf{A}^{-1} = 0.$$

Откуда следует, что

$$\mathbf{A}^{-1} = 2,5\mathbf{E} - 0,5\mathbf{A}.$$

6. Записать линейную форму с матрицей

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

и квадратичную форму с матрицей

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Является ли эта форма знакоопределенной?

Линейная форма имеет вид

$$L(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3,$$

искомая квадратичная форма

$$G(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 6x_2x_3 - x_3^2$$

не является знакоопределенной, поскольку критерий Сильвестра не выполняется ни для положительной, ни для отрицательной определенности.

7. Заметим, что норма вектора  $\mathbf{x}$  это не только его длина, но и расстояние между ним и нулевым вектором, поэтому множество векторов, для которых

$$\|\mathbf{x}\| = 1$$

можно интерпретировать как *сферу* единичного радиуса с центром в начале координат. Используя разные нормы, записать аналитический вид этих сфер.

На плоскости сфера в смысле  $\|\mathbf{x}\|_2$  это окружность

$$x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

но в смысле нормы  $\|\mathbf{x}\|_1$  — это ромб

$$|x_1| + |x_2| = 1,$$

если использовать  $\|\mathbf{x}\|_\infty$ , то сфера принимает форму квадрата

$$\max(|x_1|, |x_2|) = 1.$$

## А.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

### А.2.1. Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа устанавливает соответствие между функцией  $f(t)$  действительного переменного  $t$ , называемой *оригиналом*, и функцией  $F(s)$  комплексного переменного  $s = \alpha + j\omega$ , называемой ее *изображением*.

Изображение по Лапласу функции  $f(t)$ , определенной на положительной полуоси  $t > 0$ , называют выражение

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s). \tag{А.31}$$

Обратное преобразование Лапласа, определяющее по изображению  $F(s)$  его оригинал имеет вид

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds = f(t), \quad (\text{A.32})$$

где  $\sigma > 0$  и определяет область сходимости преобразования.

Преобразование Лапласа обладает свойствами:

- $\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$  — линейности;
- $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$  — дифференцирования оригинала;
- $\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$ ;
- $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$  — интегрирования оригинала;
- $\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = F(s + \alpha)$  — сдвига аргумента у изображения;
- $\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$  — дифференцирования изображения;
- $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s)ds$  — интегрирование изображения;
- $\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \alpha F(\alpha s)$  — изменения масштаба;
- $\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right] = F_1(s) * F_2(s)$  — свертки оригиналов.

Для преобразования Лапласа справедливы предельные теоремы:

$$\begin{aligned} & \bullet \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s); \\ & \bullet \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Двустороннее преобразование Лапласа определяется для функции с областью определения, включающей отрицательную полуось  $t < 0$ , следующим образом:

$$\mathcal{L}_2[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s). \quad (\text{A.34})$$

Непрерывное преобразование Фурье связано с двусторонним преобразованием Лапласа соотношением:

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{L}_2[f(t)]|_{s=j\omega} = F(s)|_{s=j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (\text{A.35})$$

**Примеры:**

1. Найти  $\mathcal{L}[\delta(t)]$ ,  $\mathcal{L}[1(t)]$ .

Из определения преобразования следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta(t)] &= \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = e^0 = 1, \\ \mathcal{L}[1(t)] &= \int_0^{\infty} 1(t)e^{-st} dt = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-z} dz = \frac{1}{s}. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

2. Найти  $\mathcal{L}[e^{-\alpha t}]$ .

Справедливо, что

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}] = \mathcal{L}[e^{-\alpha t}1(t)],$$

поэтому по свойству сдвига аргумента у изображения находим, что

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}1(t)] = \frac{1}{s + \alpha}.$$

3. Найти  $\mathcal{L}[\sin \omega t]$ .

Справедливо по свойству линейности, что

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \mathcal{L}[\text{Im } e^{-j\omega t}] = \text{Im} \mathcal{L}[e^{-j\omega t}],$$

поэтому находим, что

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \text{Im} \frac{1}{s - j\omega} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

4. Найти обратное преобразование Лапласа  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^2 + 0,5s + 1}{s^2(s + 2)} \right]$ .

Представим дробь в виде суммы правильных дробей и затем по свойству линейности находим обратное преобразование от каждого слагаемого

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^2 + 0,5s + 1}{s^2(s + 2)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{s + 2} \right] = 0,5t + e^{-2t}.$$

### А.2.2. $Z$ -преобразование

Дискретным аналогом преобразования Лапласа является  $Z$ -преобразование. Оно устанавливает соответствие между дискретной функцией

$$f(kh) = f(t); \quad t = kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

называемой *оригиналом*, и функцией  $F(z)$  комплексного переменного  $z$ , называемой *дискретным изображением*.

$Z$ -преобразование определяет соотношение

$$\mathcal{Z}[f(t), t = kh] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh)z^{-k} = F(z). \quad (\text{A.37})$$

Обратное  $Z$ -преобразование осуществляют по формуле

$$\mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z)z^{k-1} dz = f(kh), \quad (\text{A.38})$$

где круговой интеграл берут по замкнутому контуру, который заключает все особые точки функции  $F(z)$ .

$Z$ -преобразование обладает свойствами:

- $\mathcal{Z}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(z) + \beta F_2(z)$  — линейности;
- $\mathcal{Z}[f(t + h)] = zF(z) - zf(0)$  — сдвига на шаг вперед;
- $\mathcal{Z}[f(t + mh)] = z^m \left[ F(z) - \sum_{n=0}^{m-1} f(nh)z^{-n} \right]$  — сдвига на  $m$  шагов вперед;
- $\mathcal{Z}[f(t - h)] = z^{-1}F(z)$  — сдвига на шаг назад;
- $\mathcal{Z} \left[ \sum_{k=0}^n f(kh) \right] = \frac{z}{z-1} F(z)$  — конечной суммы;
- $\mathcal{Z}[e^{-\alpha t} f(t)] = F(e^{\alpha h} z)$  — мультипликации экспонентой;
- $\mathcal{Z}[t f(t)] = -hz \frac{d}{dz} F(z)$  — дифференцирования изображения;
- $\mathcal{Z}[\alpha^t f(t)] = F\left(\frac{z}{\alpha^h}\right)$  — масштаба;
- $\mathcal{Z} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} f_1(t - kh) f_2(kh) \right] = F_1(z) * F_2(z)$  — свертки оригиналов.

Для  $Z$ -преобразования справедливы предельные теоремы:



- $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z);$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z).$

$Z$ -преобразование  $F(z)$  непрерывной функции  $f(t)$  может быть найдено по известному преобразованию Лапласа  $F(s)$  этой функции.

$Z$ -преобразование это преобразование Лапласа решетчатой функции, производимое с помощью замены переменных:  $F(s) = F(z)|_{z=e^{sh}}$ .

Если функция

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

имеет  $n$  простых полюсов, то искомое  $Z$ -преобразование может быть вычислено из выражения

$$F(z) = \sum_{k=1}^n \frac{B(\zeta_k)}{A'(\zeta_k)} \frac{1 - e^{-\zeta_k h}}{z}, \tag{A.39}$$

где  $\zeta_k$  —  $k$ -ый простой полюс функции  $F(s)$ .

**Примеры:**

**1.** Найти  $\mathcal{Z}[1(t)]$ .

Из определения  $Z$ -преобразования следует, что по свойству бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\mathcal{Z}[1(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} 1(kh)z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1.$$

**2.** Найти  $\mathcal{Z}[kh]$ .

Из определения  $Z$ -преобразования следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[kh] &= hz^{-1} + 2hz^{-2} + \dots = hz^{-1} (1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots) = \\ &= hz^{-1} \frac{d}{dz^{-1}} (z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots). \end{aligned}$$

**3.** Найти  $\mathcal{Z}[e^{-\alpha kh}]$ .

Справедливо, что  $\mathcal{Z}[e^{-\alpha kh}] = \mathcal{Z}[e^{-\alpha kh} 1(kh)]$ , тогда по свойству мультипликации экспонентой

$$\mathcal{Z}[e^{-\alpha kh}] = \frac{z}{z - e^{-\alpha h}}.$$

**4.** Найти  $\mathcal{Z}[\delta(t-h)]$ ,  $\mathcal{Z}[1(t-h)]$ .

Используя свойство сдвига назад на шаг, находим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\delta(t-h)] &= \frac{\mathcal{Z}[\delta(t)]}{z} = \frac{1}{z}, \\ \mathcal{Z}[1(t-h)] &= \frac{\mathcal{Z}[1(t)]}{z} = \frac{1}{z-1}. \end{aligned}$$

**5.** Найти  $Z$ -оригинал выражения  $\frac{2z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$ .

Выполним прямое деление многочлена числителя на многочлен знаменателя

$$\frac{2z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = 2z^{-1} + 6z^{-2} + 14z^{-3} + \dots,$$

а затем по свойству линейности  $Z^{-1}$ -преобразования найдем

$$Z^{-1}[2z^{-1} + 6z^{-2} + 14z^{-3} + \dots] = \{f(0) = 0, f(1) = 2, f(2) = 6, f(3) = 14, \dots\}.$$

### А.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

#### А.3.1. Характеристики случайных величин

Случайная величина  $\zeta(\omega)$  — это функция результата опыта или наблюдения  $\omega$ , взятого из пространства возможных элементарных событий  $\{\omega\}$ .

Говорят, что случайная величина задана, если известны *вероятности событий*  $\{x_i \leq \zeta < x_j\}$  для любых  $x_i < x_j$ .

Различают *дискретные* и *непрерывные* случайные величины. В первом случае  $\zeta$  может принимать конечное или счетное множество значений  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  с соответствующими вероятностями

$$\mathbb{P}\{\zeta = x_k\} = p_k, \quad (\text{A.40})$$

во втором случае случайная величина может принимать любое значение из непрерывного множества и поэтому задается плотностью вероятностей  $f(x)$ .

Распределение вероятностей случайной величины задается функцией

$$F(x) = \mathbb{P}\{\zeta < x\}, \quad (\text{A.41})$$

называемой *функцией распределения случайной величины*:

для дискретной

$$F(x) = \sum_k p_k, \quad x_k < x, \quad (\text{A.42})$$

для непрерывной

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (\text{A.43})$$

Числовыми характеристиками распределения вероятностей случайной величины являются:

*математическое ожидание*  $\mathbb{M}\zeta$ ;

*дисперсия*  $D_\zeta = \mathbb{M}(\zeta - \mathbb{M}\zeta)^2$ ;

*начальные и центральные моменты распределения*

$$\mathbb{M}\zeta^s; \quad \mathbb{M}(\zeta - \mathbb{M}\zeta)^s, \quad s = 1, 2, \dots \quad (\text{A.44})$$

Начальные моменты  $\mathbb{M}\zeta^s$ ,  $s = 1, 2, \dots$  вычисляются по выражениям:

для дискретной случайной величины

$$\mathbb{M}\zeta^s = \sum_k x_k^s p_k; \tag{A.45}$$

$$\mathbb{M}\zeta^s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx. \tag{A.46}$$

Очевидно, первый начальный момент — математическое ожидание, второй центральный момент — дисперсия случайной величины

$$D_\zeta = \mathbb{M}\zeta^2 - (\mathbb{M}\zeta)^2. \tag{A.47}$$

Математическое ожидание обладает свойством линейности:

$$\mathbb{M}(a\zeta + b\eta) = a\mathbb{M}\zeta + b\mathbb{M}\eta. \tag{A.48}$$

Векторная случайная величина  $\zeta = (\zeta_1 \ \zeta_2 \ \dots \ \zeta_n)^T$  принимает значения  $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$  в  $n$ -мерном пространстве, и каждая из величин  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  этого вектора является одномерной случайной величиной.

Функцию распределения векторной случайной величины определяют в виде:

$$F(\mathbf{x}) = \mathbb{P}\{\zeta_1 < x_1, \zeta_2 < x_2, \dots, \zeta_n < x_n\}.$$

### А.3.2. Характеристики случайных процессов

*Случайный* или *стохастический процесс*  $\zeta(t)$  есть случайная функция независимой переменной  $t$ . Каждое испытание дает определенную реализацию  $x(t)$  случайного процесса, поэтому случайный процесс рассматривают как совокупность всевозможных реализаций данного процесса.

Случайный процесс можно рассматривать и как совокупность одномерных случайных величин  $\{\zeta(t_1), \zeta(t_2), \dots\}$  в моменты времени  $t_1, t_2, \dots$ . При этом задают одномерные распределения всех этих величин.

Случайный процесс может быть дискретным или непрерывным в зависимости от вида распределений  $\zeta(t_1), \zeta(t_2), \dots$ .

Стохастический процесс называют *случайной последовательностью*, если переменная  $t$  принимает дискретные значения.

Случайный процесс  $\zeta(t)$  описывается совокупностью совместных распределений вероятностей случайных величин  $\zeta(t_1), \zeta(t_2), \dots$  для всевозможных моментов времени  $t_1, t_2, \dots$ .

*Стационарные случайные процессы* имеют неизменные во времени вероятностные характеристики, в частности, при любых  $t, s$  случайные величины  $\zeta(t), \zeta(s)$  имеют одинаковые распределения.

Приведем характеристиками непрерывного стационарного случайного процесса.

*Среднее по множеству реализаций*

$$\bar{\zeta}(t) = \mathbb{M}[\zeta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x, t) = m_\zeta(t). \tag{A.49}$$

Среднее по времени

$$\tilde{\zeta}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (\text{A.50})$$

Корреляционная функция

$$\mathbb{M}[(\zeta(t_1) - m_\zeta(t_1))(\zeta(t_2) - m_\zeta(t_2))] = R_\zeta(t_1, t_2) \quad (\text{A.51})$$

для стационарного стохастического процесса

$$R_\zeta(t_1, t_2) = R_\zeta(t_2 - t_1) = R_\zeta(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (\text{A.52})$$

Стационарный процесс называют *эргодическим*, если достоверно, что среднее по множеству совпадает со средним по времени:

$$\mathbb{P}\{\bar{\zeta}(t) = \tilde{\zeta}(t)\} = 1, \quad (\text{A.53})$$

тогда  $\bar{\zeta}(t) = \tilde{\zeta}(t) = m_\zeta(t)$ .

Для эргодических процессов с нулевым средним корреляционная функция может быть вычислена по формуле

$$R_\zeta(\tau) = \mathbb{M}[\zeta(0)\zeta(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt. \quad (\text{A.54})$$

Корреляционная функция стационарного случайного процесса обладает свойствами:

$$\begin{aligned} R_\zeta(\tau) &= R_\zeta(-\tau); \\ |R_\zeta(\tau)| &\leq R_\zeta(0) = \mathbb{M}\zeta^2 = D_\zeta. \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

*Взаимную корреляционную функцию* двух стационарных случайных процессов  $\zeta(t), \eta(t)$  определяет формула

$$R_{\zeta\eta}(\tau) = \mathbb{M}[\zeta(0)\eta(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau)dt. \quad (\text{A.56})$$

Взаимная корреляционная функция обладает свойствами:

$$\begin{aligned} R_{\zeta\eta}(\tau) &= R_{\eta\zeta}(-\tau); \\ |R_{\zeta\eta}(\tau)|^2 &\leq R_\zeta(0)R_\eta(0) = D_\zeta D_\eta. \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Взаимные корреляционные функции  $R_{\zeta\eta}(\tau), R_{\eta\zeta}(\tau)$  устанавливают меру линейной связи между случайными процессами  $\zeta(t), \eta(t)$  разделенными интервалом времени  $\tau$ .

Функции

$$R_{\zeta\zeta}(\tau) = R_\zeta(\tau), \quad R_{\zeta\eta}(\tau), \quad R_{\eta\zeta}(\tau), \quad R_{\eta\eta}(\tau) = R_\eta(\tau)$$

образуют корреляционную матрицу

$$\begin{pmatrix} R_{\zeta}(\tau) & R_{\zeta\eta}(\tau) \\ R_{\eta\zeta}(\tau) & R_{\eta}(\tau) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.58})$$

Спектральную плотность случайного процесса  $S_{\zeta}(\omega)$  определяется соотношением Хинчина–Винера как преобразование Фурье от корреляционной функции  $R_{\zeta}(\tau)$

$$S_{\zeta}(\omega) = \mathcal{F}[R_{\zeta}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\zeta}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_0^{\infty} R_{\zeta}(\tau)\cos\omega\tau d\tau. \quad (\text{A.59})$$

Спектральная плотность процесса обладает свойствами:

$$\begin{aligned} S_{\zeta}(\omega) &\geq 0, \\ S_{\zeta}(\omega) &= S_{\zeta}(-\omega). \end{aligned}$$

Взаимные спектральные плотности случайных процессов  $S_{\zeta\eta}(\omega)$ ,  $S_{\eta\zeta}(\omega)$  определяют как преобразование Фурье от соответствующих взаимных корреляционных функций:

$$\begin{aligned} S_{\zeta\eta}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{\zeta,\eta}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau; \\ S_{\eta\zeta}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{\eta,\zeta}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau. \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Корреляционные функции могут быть вычислены как обратные преобразования Фурье от соответствующих спектральных плотностей, к примеру:

$$\begin{aligned} R_{\zeta}(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[S_{\zeta}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\zeta}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{\zeta}(\omega)\cos\omega\tau d\omega. \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

**Примеры:**

1. Определить для дискретной случайной величины распределение Бернулли и Пуассона. Определить для непрерывной случайной величины распределение экспоненциальное и нормальное.

Говорят, что дискретная случайная величина  $\zeta$  имеет распределение *Бернулли* (*биномиальное*), если она принимает значения  $x = 0, 1, 2, \dots, n$  с вероятностями

$$\mathbb{P}\{\zeta = x\} = C_n^x \mu^x (1 - \mu)^{n-x}, \quad 0 \leq \mu < 1. \quad (\text{A.62})$$

Случайная величина  $\zeta$  имеет дискретное распределение *Пуассона*, если она принимает значения  $x = 0, 1, 2, \dots$  с вероятностями

$$\mathbb{P}\{\zeta = x\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad \lambda > 0. \quad (\text{A.63})$$

Говорят, что непрерывная случайная величина  $\zeta$  имеет *экспоненциальное* распределение, если ее плотность распределения вероятностей описывается выражением

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0. \quad (\text{A.64})$$

Непрерывная случайная величина распределена по *нормальному закону* (*закону Гаусса*), если ее плотность распределения вероятностей описывается выражением

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0, a \in (-\infty, \infty). \quad (\text{A.65})$$

**2.** Определить выражения для математического ожидания случайных величин, описанных в примере **1**.

Для биномиально распределенной случайной величины

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\zeta &= \sum_{x=0}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} \mu^x (1-\mu)^{n-x} = \\ &= \mu n \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} \mu^{(x-1)} (1-\mu)^{n-x} = \mu n. \end{aligned}$$

Для случайной величины, распределенной по Пуассону

$$\mathbb{M}\zeta = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda.$$

Для экспоненциально распределенной случайной величины

$$\mathbb{M}\zeta = \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt \Big|_{\lambda t = z} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} z e^{-z} dz = \frac{1}{\lambda} \left( z e^{-z} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-z} dz \right) = \frac{1}{\lambda}.$$

Для случайной величины, распределенной по Гауссу

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\zeta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt \Big|_{\frac{t-a}{\sigma} = z} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + a) e^{-0,5z^2} dz = a. \end{aligned}$$

3. Описать свойства случайного гармонического процесса

$$\zeta(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

в котором амплитуда и частота постоянны, а фаза  $\alpha$  — равномерно распределенная на  $[-\pi, \pi]$  случайная величина.

Такой процесс стационарный и эргодический с нулевым средним и

$$R_\zeta(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau).$$

Если  $A$  — случайная величина с ненулевым средним  $\bar{\zeta}(t) = m$ , а фаза постоянна, то такой процесс стационарный, но не эргодический:  $\tilde{\zeta}(t) = 0$ , но  $\bar{\zeta}(t) = m \neq 0$ .

4. Описать свойства бинарного случайного процесса, принимающего два значения  $\pm A$ , если сменой знака в нем управляет пуассоновский случайный процесс с параметром  $0, 5\lambda$ .

Данный процесс стационарный и эргодический. Его среднее равно нулю, корреляционная функция

$$R_\zeta(\tau) = A^2 e^{-\lambda|\tau|}$$

и спектральная плотность

$$S_\zeta(\omega) = A^2 \int_{-\infty}^0 e^{\lambda\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + A^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2A^2}{\omega^2 + \lambda^2}.$$

5. Найти для случайного процесса с корреляционной функцией

$$R_\zeta(\tau) = A e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$$

его спектральную плотность.

$$\begin{aligned} S_\zeta(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_\zeta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= A \int_{-\infty}^0 e^{\lambda\tau} \cos \omega_0 \tau e^{-j\omega\tau} d\tau + A \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} \cos \omega_0 \tau e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= A \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\lambda + j(\omega_0 - \omega)} + \frac{1}{\lambda - j(\omega_0 - \omega)} \right) = \frac{2A\lambda}{\lambda^2 + (\omega_0 - \omega)^2}. \end{aligned}$$

6. Найти дисперсию случайного процесса  $\zeta(t)$  с нулевым средним, имеющего спектральную плотность  $S_\zeta(\omega)$  и корреляционную функцию  $R_\zeta(\tau)$ .

Дисперсию можно найти по формулам:

$$D_\zeta(t) = \mathbb{M}\zeta^2(t) = R_\zeta(0);$$

$$D_{\zeta}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{\zeta}(\omega) d\omega. \quad (\text{A.66})$$

7. Стационарный эргодический процесс с нулевым средним и неизменной спектральной плотностью

$$S_{\zeta}(\omega) = a^2$$

называют *белым шумом* интенсивности  $a^2$ . Описать свойства этого шума.

Случайный процесс — белый шум является идеальной моделью, все реальные процессы, близкие к белому шуму, имеют ограниченные по полосе частот спектральную плотность

$$S_{\zeta}(\omega) = \begin{cases} a^2, & |\omega| < \omega_0; \\ 0, & |\omega| \geq \omega_0. \end{cases}$$

Корреляционную функцию такого случайного процесса, называемого *цветным шумом*, задают выражением

$$R_{\zeta}(\tau) = \frac{a^2 \omega_0}{\pi} \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau}.$$

#### А.4. ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Современные средства для анализа, синтеза систем управления представлены достаточно большим числом интерактивных программных средств, разнообразие которых не только в списке решаемых задач моделирования, идентификации, анализа и синтеза различных систем, но и в сервисных возможностях этих средств.

Инструментальные программные средства автоматизированного исследования и проектирования систем управления позволяют:

- выполнять математические операции над матрицами и полиномами, решать линейные и нелинейные алгебраические, дифференциальные и разностные уравнения, находить решения задач оптимизации;
- составлять и преобразовывать математические модели непрерывных и дискретных, линейных и нелинейных систем, вычислять динамические характеристики этих моделей, анализировать свойства систем управления;
- выполнять оптимальный синтез систем с заданными показателями качества управления в условиях присутствия или отсутствия помех;
- позволяют строить двумерные и трехмерные графики функциональных зависимостей, линии уровня, годографы и диаграммы, фазовые кривые и портреты исследуемых процессов, изменять масштабы зависимостей линейно или логарифмически, изображать и преобразовывать структурные модели систем, дополнять графику текстовым сопровождением, выполнять статистический анализ и представление результатов исследования.

Среди всего многообразия программных средств отметим те, что ориентированы на использование персональных компьютеров и могут быть использованы при



проведении лабораторных работ, в курсовом и дипломном проектировании, отметим практически универсальное средство *Simulink*.

Интерактивный программный комплекс *Simulink* в вычислительной среде *MATLAB* предназначен для профессионального использования как в научных исследованиях и реальном проектировании, так и в учебном процессе. Комплекс позволяет создавать математические модели линейных и нелинейных стационарных и нестационарных непрерывных и дискретных систем, исследовать реакции этих систем на детерминированные и случайные внешние воздействия, позволяет выполнять параметрический анализ и оптимизировать параметры этих систем. Для этого комплекс располагает командами:

- создания и изменения структуры модели и ее параметров, которые используют графический язык структурных схем и слова естественного языка;
- одиночного и многократного запуска, останова и продолжения процесса моделирования;
- формирования и преобразования функциональных зависимостей, годографов, траекторий корней, диаграмм, статистический графиков и числовых данных с выводом их на дисплей, принтер или в файл;
- настройки, укрупнения и дезинтеграции моделей, командами сохранения и воспроизведения моделей систем;
- анализа в частотной и действительной области;
- алгебраического проектирования регуляторов и оптимизации их настройки;
- сервиса, позволяющих включать программы пользователя, выводить на экран текстовые комментарии к результатам моделирования.

Комплекс *Simulink* располагает большим числом различных функциональных блоков для моделирования непрерывных и дискретных, линейных и нелинейных операторов, генерирования детерминированных и стохастических воздействий, выполнения логических условий и функций, оптимизации и аппроксимации функций.

Вычислительная среда *MATLAB* является интерактивной системой для выполнения операций с векторами, матрицам и массивами данных. Система *MATLAB* содержит базовые программные продукты и пакеты прикладных программ — *Toolboxes*, по различным направлениям вычислительной математики, статистики, теории аппроксимации, символьной математики, теории оптимизации, теории управления, обработки сигналов и изображений, средство моделирование *Simulink*.

Пакет прикладных программ *LTI System Toolbox (Linear Time Invariance System)* предназначен для анализа и синтеза линейных стационарных непрерывных и дискретных систем автоматического управления. Этот пакет реализует технологию объектно-ориентированного программирования. Объектом особого класса является исследуемая система, которая может быть задана моделью состояния, передаточной функцией, представлением *нули — полюсы — коэффициент передачи*, система может иметь как скалярные, так и векторные входы и выходы. Для объектов этого класса введены операции параллельного, последовательного, встречно-параллельного соединений, преобразования модели, анализа расположения нулей и полюсов, построения траектории корней, частотных характеристик, переходной и весовой функций.

Пакет *LTI System Toolbox* содержит программы, предназначенные для аналитического синтеза замкнутой по выходу или состоянию системы, наблюдателей состояния,

фильтров Калмана. Большинство программ пакета имеют интерактивный графический интерфейс.

*MATLAB* содержит прикладные программы, решающих смежные задачи теории управления: расчет цифровых фильтров и спектральный анализ сигналов и изображений, синтез робастных систем, построение нейронных сетей, регуляторов нечеткой логики.

Для решения задач моделирования динамических систем среда *MATLAB* содержит специализированный прикладной пакет *Simulink*. Использование этого пакета предполагает задание модели имитируемого объекта в виде структурной схемы. Структурная схема формируется из функциональных блоков базовой или пользовательской библиотеки. Входы и выходы блоков коммутируются проводниками сигналов. Сигналы могут быть как скалярными, так и векторными. Редактирование структуры, задание параметров блоков, коммутацию производят с использованием манипулятора мышь и клавиатуры.

Базовая библиотека пакета *Simulink* содержит разделы:

- *Sources* — блоки констант, генераторы ступенчатого, линейно-растущего и гармонического сигналов, случайных шумов, блоки ввода произвольного сигнала;
- *Sinks* — блоки цифровых и графических индикаторов, блоки вывода данных в файл или рабочую область среды *MATLAB*;
- *Linear* — блоки для задания внешней или внутренней модели линейного непрерывного звена, которые содержат сумматоры, интеграторы, передаточные функции, матричные модели состояния;
- *Discrete* — блоки для задания внешней или внутренней модели линейного дискретного звена;
- *Nonlinear* — блоки для задания типовых и табличных нелинейностей, произвольной математической функции, логических операций, запаздывания;
- *Connections* — блоки структурирования модели, беспроводного коммутирования, векторного расширения сигналов, блоки подсистем.

Открытая архитектура *Simulink* допускает расширение средств моделирования путем включения блоков, библиотек блоков и интерфейсов с *MATLAB*, *Fortran* или *C*-программами пользователя. Для достижения наглядности и компактности структурных схем сложных объектов в *Simulink* существует блок *Subsystem*, позволяющий представить фрагмент структуры в виде внутренней — развернутой схемы, и внешней — упрощенной модели *вход-выход*.

Блоки подсистем могут быть вложенными, при этом все блоки и сигналы подсистемы являются локальными и недоступны на более высоком иерархическом уровне. Формирование структурной схемы завершают коммутацией входных, выходных портов блоков, размещением индикаторов и задающих генераторов. Компилирование схемы производится автоматически. В случае обнаружения ошибок выдается диагностическое сообщение.

Моделирование процессов проводят выбранным численным методом с переменным или постоянным шагом. Допускается вариация начальных условий, начального и конечного времени моделирования, абсолютной и относительной ошибки метода, максимального и минимального значения шага интегрирования.

Результаты моделирования отображают в графических окнах стандартных или специализированных индикаторов. Любые сигналы модели могут быть экспортированы в рабочую область *MATLAB* и обработаны аналитическими средствами среды. Пользователь может создавать собственные функциональные блоки в рамках специального протокола *S-Function*.

Структуру и содержание программных средств *Simulink* постоянно совершенствуют. Результаты развития и текущее состояние этих программных продуктов можно видеть в трудах и на сайте [www.softlinegroup.com](http://www.softlinegroup.com) постоянного действующего семинара при Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН.

---

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев, А.А.* и др. Теория управления / А.А. Алексеев, Д.Х. Имаев, Н.Н. Кузьмин и др. — М.: Высшая школа, 2010.
2. *Андреев, Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976.
3. *Брайсон, А.* Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. — М.: Мир, 1972.
4. *Дёч, Г.* Руководство по практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. — М.: Наука, 1971.
5. *Квакернаак, Х.* Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. — М.: Мир, 1977.
6. *Куо, Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления. — М.: Машиностроение, 1986.
7. *Острём, К.* Системы управления с ЭВМ / К. Острём, Б. Виттенмарк. — М.: Мир, 1987.
8. *Певзнер, Л.Д.* Практикум по теории автоматического управления. — М.: Высшая школа, 2006.
9. *Певзнер, Л.Д.* Математические основы теории систем / Л.Д. Певзнер, Е.П. Чураков. — М.: Высшая школа, 2009.
10. *Ройтенберг, Я.Н.* Автоматическое управление. — М.: Наука, 1982.
11. Сборник задач по теории автоматического управления / под ред. В.А. Бесекерского. — М.: Наука, 1983.
12. *Сю, Д.* Современная теория автоматического управления и ее применение / Д. Сю, А. Мейер. — М.: Машиностроение, 1972.
13. *Топчеев, Ю.И.* Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. — М.: Машиностроение, 1989.
14. *Химмельблау, Д.* Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975.
15. *Цыпкин, Я.З.* Основы теории автоматических систем. — М.: Наука, 1977.
16. *Шульце, К-П.* Инженерный анализ адаптивных систем / К-П. Шульце, К-Ю. Реберг — М.: Мир, 1992.
17. *Эйкхофф, П.* Основы идентификации систем управления. — М.: Мир, 1975.

---

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания** 219  
**Адаптивная система** 370  
**Акермана формула** 264, 293  
**Алгоритмы**  
— аналитического синтеза регулятора 268,292  
— векторной оптимизации 375  
— скалярной оптимизации 374  
**Амплитудно-фазовая характеристика** 121  
— нелинейного элемента 99  
**Андронов А. А.** 19, 89  
**Аппроксимация**  
— *Бодэ* 128  
— дискретной непрерывной системы 287  
— — *Тустена* 288  
— — *Эйлера* 288  
**Астатизм системы** 162  
  
**Барбашин Е. А.** 207  
**Беллман Р.** 346  
**Боголюбов Н. А.** 97  
**Бодэ Х.** 119, 142  
**Быстродействие оптимальное** 336  
  
**Ван дер Поль** 85  
**Взаимная корреляционная функция** 404  
**Вектор**  
— входа 24  
— выхода 24  
— состояния 24  
— управления 24  
— фазовой скорости 88  
  
*Винер Н.* 309  
**Воздействие** 7  
**Возмущение** 7  
**Восстановление дискретного сигнала** 57  
**Временные характеристики** 118  
**Время**  
— первого максимума 165  
— переходного процесса 165  
**Вынужденный процесс** 159  
*Вышнеградский И. А.* 18, 151  
  
**Гамильтониан** 343  
**Годограф**  
— частотный 121  
— корневой 149  
— *Михайлова* 141  
— *Найквиста* 121  
*Гольдфарб Л. С.* 220  
*Гурвиц А.* 19, 137  
*Гурвицев угол* 214  
  
**Движение системы**  
— возмущенное 111  
— невозмущенное 109  
— номинальное 34  
— оптимальное 335  
**Двойственность** 107  
**Дельта функция** *Дирака* 117  
*Джури Э.* 186  
**Диаграмма** *Никольса* 121  
**Динамические характеристики**  
системы 116  
**Дискретизация непрерывной системы** 57

- Дискретной системы  
   — модель 58  
   — — внутренняя 58  
   — — внешняя 59  
 Дисперсия 402  
 Доминирующие полюсы 168  
 Допустимое управление 338  
**Жуковский Н. Е.** 19, 89  
**Задачи**  
   — анализа и синтеза систем 15  
   — идентификации 325  
   — *Лурье* 210  
   — оптимального управления 335  
 Закон управления 8  
 Замкнутая система управления 16  
 Запасы устойчивости 146  
 Звено динамическое типовое  
   — дифференцирующее 127  
   — запаздывания 131  
   — инерционное 127  
   — интегрирующее 126  
   — колебательное 128  
   — консервативное 130  
   — неминимально-фазовое 132  
   — пропорциональное 125  
   — форсирующее  
   — — второго порядка 131  
   — — первого порядка 128  
**Ивнс Р.** 149  
 Идентификация параметрическая 325  
 Изохрона 354  
 Импульсная характеристика 118  
 Импульсный элемент идеальный 57  
 Интегральные оценки качества 166  
**Калман Р.** 19, 106, 321  
 Каноноческая форма модели системы 46  
 Каноническая структура  
   автоматической системы 42  
 Качество процессов управления 159  
 Квадратичная форма 391  
 Квантование  
   — непрерывной системы 57  
*Колмогоров А. Н.* 19, 309  
 Комплексный коэффициент усиления 119  
 Комплексный передаточный коэффициент нелинейного элемента 98  
 Корректирующее устройство 237  
 Корреляционная функция 404  
 Коэффициенты гармонической линеаризации 98  
 Коэффициенты ошибки 161  
*Красовский Н. Н.* 207  
 Кривые *Бодэ* 120  
 Критерий  
   — абсолютной устойчивости  
     *Попба* 213  
   — *Ляпунова* устойчивости в малом 203  
   — *Сильвестра* знакоопределенности квадратичной формы 391  
   — *Калмана* управляемости и наблюдаемости линейной системы  
   — — дискретной 181  
   — — непрерывной 106  
   — устойчивости линейной системы  
   — — *Бодэ* 143  
   — — *Гурвица* 139  
   — — *Джури* 186  
   — — *Зубова* 139  
   — — *Михайлова* 141  
   — — *Найквиста* 142  
   — — *Рауса* 139  
*Крылов, Н. М.* 97  
**Лётов А. М.** 19, 261  
 Линейная форма 391  
 Линия переключения управления 359  
 Линеаризации методы  
   — гармонической 97  
   — касательной 34  
   — стохастической 109  
*Лузин Н. Н.* 20  
*Лурье А. И.* 10  
*Люенбергер Д.* 274  
*Ляпунов А. М.* 19, 137, 205

**Мак-Ленна** таблица 167

**Матрица**

- *Гессе* 393
- *Гурвица* 139
- знакопределенная 391
- наблюдаемости 107, 182
- основные понятия 388
- управляемости 106, 181
- *Якоби* 203

**Метод**

- аналитического синтеза регуляторов 261
- гамонической линеаризации 97
- *Гаусса* наименьших квадратов 326
- динамического программирования 346
- *D*-разбиения пространства параметров 147
- изоклин 89
- множителей *Лагранжа* 337
- *Циглера–Никольса* 245
- последовательной коррекции 237

**Михайлов А. В.** 141

**Модель математическая системы** 23

**Модель операторная** 37

**Модифицированная частотная характеристика** 212

**Модуляционная внешняя модель** 71

**Моменты**

- импульсной характеристики 160
- квантования 57

**Наблюдаемость линейной системы**

- дискретной 181
- непрерывной 106

**Наблюдатель аperiодический** 299

**Наблюдатель асимптотический** 272

**Найквист Г.** 19, 142

**Нелинейная система** 80

**Нелинейный элемент** 81

**Норма вектора** 394

**Нули системы** 37

**Область устойчивости** 146

**Обратная связь** 7

**Объект управления** 7

**Оператор**

- дифференцирования *Коши* 37
- сдвига разностный 64

**Операторная передаточная функция** 37

**Определитель матрицы** 389

**Оптимальное управление** 335

**Особая точка** 88

***Острём К.*** 19

**Оценки качества переходного процесса** 165

**Ошибка**

- среднеквадратическая 308
- статическая 161
- установившаяся 160

***Парсеваля*** соотношение 167

**Передаточная функция** 37

**Переменные состояния** 24

**Переходный процесс** 159

***Петров Б. Н.*** 19

**Полином *Вышнеградского*** 151

**Полюсы доминирующие системы** 168

***Понтрягин Л. С.*** 19, 342

***Пóпов В. -М.*** 211

**Порабола *Пóпова*** 213

**Предельный коэффициент усиления** 147

**Предельный цикл** 91

**Преобразование**

- аналого-цифровое 57
- *Z*-дискретное 400
- *Лапласа* 397
- *Мёбиуса* 186
- цифроаналоговое 57

**Принцип**

- максимума *Понтрягина* 342
- оптимальности *Беллмана* 346
- суперпозиции 43
- управления 15

**Пространство**

- параметрическое 146
- фазовое 80

**Процесс случайный** 403

- Прямая *Попова* 212  
*Пуанкаре А.* 19, 89
- Ранг матрицы** 390  
*Раус Э.* 138
- Регулятор  
 — адаптивный 372  
 — типовые 242
- Релейная характеристика 81
- Робастность системы 111
- Ряд *Фурье* 98
- Сигнал**  
 — импульсный *Дирака* 117  
 — линейный 117  
 — рассогласования 16  
 — стохастический 403  
 — ступенчатый *Хевисайда* 117
- Система**  
 — автоматического управления 7  
 — автономная нелинейная 80  
 — адаптивная 370  
 — дискретная 56  
 — субоптимальная 364  
 — линейная 23  
 — оптимальная 335  
 — — по быстродействию 358  
 — — по квадратичному критерию 355  
 — переменной структуры 364  
 — программного управления 15  
 — следящая 15  
 — стабилизации 15  
 — экстремальная 372
- Скользкий режим 364
- След матрицы 390
- Случайный процесс 403
- Собственные значения матрицы 390
- Спектральная плотность 405
- Стохастические системы управления 305
- Структурная схема системы 7
- Теорема**  
 — *Барбашина–Красовского* 207  
 — *Беллмана–Фельдбаума* 362  
 — *Гамильтона–Кэли* 392  
 — *Калмана–Бьюси* 322  
 — *Ляпунова* об устойчивости линейной системы 137  
 — *Ляпунова* об устойчивости нелинейной системы  
 — — в большом 206  
 — — в малом 203  
 — — в целом 207  
 — *Понтрягина* 343  
 — *Попова* 211  
 — *Харитонова* 113
- Траектория движения  
 — корней системы 149  
 — фазовая 88  
 — оптимальная 335
- Управляемость системы** 106
- Уравнение  
 — *Беллмана* 348  
 — *Ван дер Поля* 85  
 — *Винера–Хопфа* 309  
 — *Риккати* 270  
 — состояния 24  
 — чувствительности 113  
 — *Эйлера–Лагранжа* 338
- Условия  
 — возникновения автоколебаний 220  
 — трансверсальности 270
- Установившейся процесс 159
- Устойчивость системы  
 — абсолютная 211  
 — асимптотическая 109  
 — в большом 205  
 — в малом 203  
 — в целом 206  
 — параметрическая 146  
 — по *Ляпунову* 109
- Фазовые координаты системы** 88
- Фазовый портрет системы 88
- Фильтр  
 — *Винера–Колмогорова* 307  
 — *Калмана–Бьюси* 322
- Функционал качества 335



**Функция**

- Беллмана 348
- Ляпунова 206

**Характеристики частотные** 119

Характеристический многочлен 37

*Хевисайд О.* 117*Харитонов В. Л.* 114**Цифровая система управления** 56*Цыпкин Я. З.* 20, 215**Частота**

- автоколебаний 224
- резонансная 149
- собственная 129

**Числа**

- собственные матрицы 390
- характеристические системы 37

Чувствительность параметрическая 112

**Шум**

- белый 408
- цветной 408

*Щипанов Г. В.* 20

Экстраполятор нулевого порядка 57

Экстремальная система 372

Экстремальный переходный процесс 166

Эталонная модель 383

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие</i> . . . . .	3
<i>Часть I. Введение</i> . . . . .	5
<i>Глава 1. Основные понятия теории управления</i> . . . . .	7
1.1. Ключевые понятия теории автоматического управления . . . . .	7
1.2. Примеры автоматических систем управления . . . . .	9
1.3. Основные задачи теории управления . . . . .	14
1.4. Принципы автоматического управления . . . . .	15
1.5. Исторический очерк создания теории автоматического управления . . . . .	17
<i>Часть II. Анализ систем управления</i> . . . . .	21
<i>Глава 2. Математические модели линейных непрерывных систем</i> . . . . .	23
2.1. Примеры непрерывных систем управления . . . . .	23
2.2. Модели состояния линейной системы . . . . .	24
2.3. Линеаризация нелинейных моделей . . . . .	34
2.4. Модели типа вход-выход . . . . .	37
2.5. Графовые модели системы . . . . .	38
2.6. Взаимосвязь моделей системы . . . . .	43
2.7. Упражнения . . . . .	52
<i>Глава 3. Математические модели линейных дискретных систем</i> . . . . .	56
3.1. Примеры цифровых систем управления . . . . .	56
3.2. Модели состояния дискретной системы . . . . .	57
3.3. Передаточные функции линейной дискретной системы . . . . .	64
3.4. Взаимосвязь моделей системы . . . . .	67
3.5. Модуляционная внешняя модель дискретной системы . . . . .	71
3.6. Упражнения . . . . .	76
<i>Глава 4. Математические модели нелинейных систем</i> . . . . .	79
4.1. Примеры нелинейных систем управления . . . . .	79
4.2. Математические модели нелинейных систем . . . . .	80
4.3. Топологические методы анализа нелинейных систем . . . . .	88
4.4. Линейные представления нелинейной модели . . . . .	96
4.4.1. Гармоническая линеаризация . . . . .	97
4.4.2. Стохастическая линеаризация . . . . .	99
4.5. Упражнения . . . . .	103

<i>Глава 5.</i>	Свойства и характеристики линейных непрерывных систем управления . . . . .	106
5.1.	Управляемость и наблюдаемость непрерывных систем . . . . .	106
5.2.	Устойчивость непрерывных линейных систем управления . . . . .	108
5.3.	Чувствительность и робастность систем управления . . . . .	111
5.4.	Динамические характеристики линейных систем управления . . . . .	116
5.5.	Динамические характеристики типовых звеньев линейной системы . . . . .	124
5.6.	Упражнения . . . . .	135
<i>Глава 6.</i>	Исследование устойчивости линейных непрерывных систем управления . . . . .	137
6.1.	Метод Ляпунова для оценки устойчивости линейной системы . . . . .	137
6.2.	Алгебраические критерии устойчивости . . . . .	138
6.3.	Частотные критерии устойчивости . . . . .	141
6.4.	Анализ параметрической устойчивости . . . . .	146
6.5.	Упражнения . . . . .	156
<i>Глава 7.</i>	Анализ качества процессов управления в непрерывных линейных системах . . . . .	159
7.1.	Динамические процессы и ошибки в системах управления . . . . .	159
7.2.	Оценка качества переходных процессов . . . . .	165
7.3.	Стохастические методы анализа процессов управления . . . . .	172
7.4.	Машинные методы анализа процессов управления . . . . .	177
7.5.	Упражнения . . . . .	178
<i>Глава 8.</i>	Исследование устойчивости и качества процессов управления в дискретных линейных системах . . . . .	181
8.1.	Управляемость и наблюдаемость дискретных систем . . . . .	181
8.2.	Устойчивость линейных дискретных систем управления . . . . .	185
8.3.	Характеристики дискретных автоматических систем управления . . . . .	190
8.4.	Анализ качества процессов управления . . . . .	192
8.5.	Упражнения . . . . .	198
<i>Глава 9.</i>	Исследование устойчивости и качества процессов управления в нелинейных системах . . . . .	201
9.1.	Устойчивость движений нелинейной системы в малом . . . . .	201
9.2.	Анализ устойчивости нелинейной системы в большом и в целом . . . . .	205
9.3.	Абсолютная устойчивость нелинейных систем управления . . . . .	210
9.4.	Периодические процессы в нелинейных системах . . . . .	219
9.5.	Анализ качества нелинейных систем управления . . . . .	228
9.6.	Упражнения . . . . .	231
<i>Часть III. Синтез систем автоматического управления . . . . .</i>		235
<i>Глава 10.</i>	Синтез линейных непрерывных систем в частотной области . . . . .	237
10.1.	Метод последовательной и параллельной коррекции . . . . .	237
10.2.	Типовые регуляторы и методы их расчета . . . . .	242
10.3.	Синтез последовательно-подчиненных регуляторов . . . . .	249
10.4.	Упражнения . . . . .	257
<i>Глава 11.</i>	Синтез линейных непрерывных систем во временной области . . . . .	261
11.1.	Методы аналитического конструирования регуляторов . . . . .	261
11.2.	Аналитический синтез линейного оптимального регулятора . . . . .	268
11.3.	Наблюдатели состояния линейной системы . . . . .	272
11.4.	Синтез замкнутой системы с наблюдателем состояния . . . . .	276
11.5.	Упражнения . . . . .	284
<i>Глава 12.</i>	Синтез цифровых систем управления . . . . .	287
12.1.	Синтез цифрового регулятора . . . . .	287
12.2.	Аналитический синтез цифровой системы управления . . . . .	292
12.3.	Цифровые наблюдатели состояния . . . . .	298
12.4.	Упражнения . . . . .	302

<i>Глава 13.</i> Синтез стохастических систем управления . . . . .	305
13.1. Задачи стохастического синтеза . . . . .	305
13.2. Синтез управления с минимальной дисперсией ошибки . . . . .	307
13.3. Оптимальная стохастическая фильтрация . . . . .	317
13.4. Фильтры Калмана . . . . .	321
13.5. Параметрическая идентификация . . . . .	325
13.6. Упражнения . . . . .	330
<i>Часть IV. Оптимальные и адаптивные системы управления</i> . . . . .	333
<i>Глава 14.</i> Системы управления оптимальные по заданному критерию . . . . .	335
14.1. Задачи оптимального управления . . . . .	335
14.2. Алгоритм принципа максимума . . . . .	342
14.3. Метод динамического программирования . . . . .	346
14.4. Системы оптимальные по квадратичному критерию . . . . .	355
14.5. Системы оптимальные по быстродействию . . . . .	358
14.6. Субоптимальные системы и системы с переменной структурой . . . . .	364
14.7. Упражнения . . . . .	367
<i>Глава 15.</i> Системы управления с адаптацией . . . . .	370
15.1. Задачи адаптивного управления . . . . .	370
15.2. Экстремальные системы и регуляторы . . . . .	372
15.3. Идентификация объекта управления в замкнутом контуре . . . . .	380
15.4. Адаптивные системы с эталонной моделью . . . . .	383
<i>Приложение А.</i> Математический аппарат теории управления . . . . .	388
А.1. Элементы матричного анализа . . . . .	388
А.1.1. Основные понятия и операции . . . . .	388
А.1.2. Характеристические числа матрицы . . . . .	390
А.1.3. Линейные и квадратичные формы . . . . .	391
А.1.4. Функции от матриц . . . . .	392
А.1.5. Нормы векторов и матриц . . . . .	394
А.2. Функциональные преобразования . . . . .	397
А.2.1. Преобразование Лапласа . . . . .	397
А.2.2. Z-преобразование . . . . .	400
А.3. Характеристики случайных процессов . . . . .	402
А.3.1. Характеристики случайных величин . . . . .	402
А.3.2. Характеристики случайных процессов . . . . .	403
А.4. Программные средства моделирования . . . . .	408
<i>Литература</i> . . . . .	412
<i>Предметный указатель</i> . . . . .	413

*Леонид Давидович ПЕВЗНЕР*  
**ТЕОРИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

*Учебное пособие*

*Издание второе,  
исправленное и дополненное*

Зав. редакцией физико-математической  
литературы *Н. А. Макарова*  
Верстка *А. Г. Сандомирская*  
Выпускающие *Т. С. Симонова, Е. П. Королькова*

ЛР № 065466 от 21.10.97  
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10  
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**  
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com  
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.  
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.  
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 02.09.13.  
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100<sup>1/16</sup>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 34,45. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленных материалов  
в ГУП ЧР «ИПК «Чувашия»».  
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, д. 13.  
Тел.: (8352) 56-00-23